

18.50

ISBN: 978-9972-813-35-1



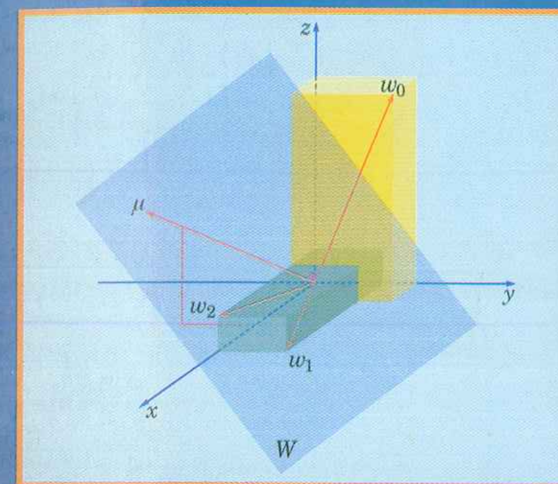
los al por mayor
fax: 567-9299

MOISÉS LÁZARO

ÁLGEBRA LINEAL

MOSHERA EDITORIAL

ÁLGEBRA LINEAL



Matrices y Determinantes
Sistema de Ecuaciones Lineales
Espacios Vectoriales
Transformaciones Lineales
Valor Propio y Vector Propio
Las Formas Racional y de Jordan
Espacios con Producto Interno
Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

MOSHERA EDITORIAL

MOISÉS LÁZARO C.

ÁLGEBRA LINEAL

Matrices y Determinantes
Sistema de Ecuaciones Lineales
Espacios Vectoriales
Transformaciones Lineales
Valor Propio y Vector Propio
Las Formas Racional y de Jordan
Espacios con Producto Interno
Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

MOISÉS LÁZARO C.



Autor: *Moisés Lázaro Carrión*

Estudios: *Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).*

Experiencia Docente: *Pontificia Universidad Católica del Perú*
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martin de Porres
Universidad Las Américas.

ÁLGEBRA LINEAL

Autor: **Moisés Lázaro Carrión**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor:

Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el depósito legan en la Biblioteca Nacional del Perú Nº : 2005-6683
International Standard Book Number ISBN .... : 978-9972-813-35-1

Derechos reservados ©

Segunda edición Octubre 2005
1ra. Reimpresión : Octubre 2009

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

PEDIDOS AL POR MAYOR
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Telefax: 567-9299

Impreso en el Perú - Printed in Perú

Este libro está dedicado:
a la juventud estudiosa
del país.

Autor: Moisés Lázaro Carrión
Estudios: Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).

Experiencia Docente: Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres
[illegible] Las Américas

ÁLGEBRA LINEAL

Autor: Moisés Lázaro Carrión

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor.

Decreto Legislativo 822
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2004-6688
International Standard Book Number ISBN 978-9972-813-35-1

Derechos reservados ©

Segunda edición .... Octubre 2005
1ra. Reimpresión .... Febrero 2009

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
[illegible]
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

[illegible]
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Telefono: 567-9299

Impreso en el Perú - Printed in Perú

PRESENTACIÓN

El presente curso de ÁLGEBRA LINEAL está enfocado hacia alumnos procedentes de ciencias, de Ingeniería y Economía que vayan a seguir retos en los que su formación académica jugarán un papel preponderante.

Mi gran preocupación ha sido, presentar los temas aquí tratados, en forma didáctica sin dejar de ser rigurosa.

El libro consta de ocho capítulos, en los que se trata:

CAPÍTULO 1: Matrices y determinantes, dos temas instrumentales de aplicación práctica que son prerrequisitos para los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 2: Sistema de ecuaciones lineales, aquí destacamos la gran importancia de las ecuaciones lineales consistentes.

CAPÍTULO 3: Espacios vectoriales, es la puerta de entrada para definir una estructura algebraica, que es el cimiento del álgebra lineal. Sobre el espacio vectorial euclideano bidimensional y tridimensional se harán las aplicaciones geométricas que son posibles de ser algebrizados. Sobre otros espacios vectoriales abstractos se definirán temas importantes del análisis.

CAPÍTULO 4: Transformaciones Lineales, aquí lo destacable es la aplicación geométrica, en lo particular a lo referente a las isometrías. Este capítulo es el preámbulo de los operadores lineales y sus diversas aplicaciones.

CAPÍTULO 5: Valor propio y Vector propio, dos temas ligados entre sí, cuyas aplicaciones son de gran importancia no solo en la geometría, sino también en el Análisis porque simplifican la resolución de problemas complicados de la geometría y de los sistemas dinámicos en especial.

CAPÍTULO 6: Las formas racional y de Jordan, son dos temas que nos permiten presentar a las transformaciones lineales de manera muy simple cuando es posible hallar nuevas bases a partir de los polinomios característicos y minimal.

CAPÍTULO 7: Espacios con producto interno, es uno de los temas muy importantes del Álgebra Lineal, porque es la base para definir los espacios normados y los espacios métricos, piezas fundamentales del análisis. Se destaca en este capitulo la adjunta de un operador lineal, cuya formalización nos permite hacer interesantes definiciones del Álgebra Lineal.

CAPÍTULO 8: Algunas aplicaciones lineales, en este capítulo hemos destacado dos aplicaciones del Álgebra Lineal: rotación de ejes cartesianos (formas cuadráticas) y la resolución de sistemas dinámicos lineales.

Obviamente hay otras aplicaciones del Álgebra Lineal, que no he abordado en este libro por lo frondoso de las mismas.

Me ilusiona pensar que los lectores quedaran satisfechos y absortos de lo hermoso que es el Álgebra Lineal.

El autor

CONTENIDO

Capítulo 1. Matrices y Determinantes.

Capítulo 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Capítulo 3. Espacios Vectoriales

Capítulo 4. Transformaciones Lineales

Capítulo 5. Valor Propio y Vector Propio (formas canónicas elementales)

Capítulo 6. Las Formas Racional y de Jordan

Capítulo 7. Espacios con Producto Interno

Capítulo 8. Algunas Aplicaciones del Álgebra Lineal

CAPÍTULO 1

MATRICES Y DETERMINANTES

1. MATRICES

Una matriz, $A_{m\times n}$, es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m filas (renglones) y n columnas.

Así tendremos:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n".

El vector fila $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{in})$ se le llama **FILA** i

Al vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se le llama **COLUMNA** j.

a_{ij} es el número que aparece en la i–ésima fila y la j–ésima columna.

2. EJEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1-i & 4+2i \\ 2 & 1-5i \\ 3+2i & 3 \end{bmatrix}$$

A Es una matriz de orden 3×1 , $a_{ij} \in I\!R$

B Es una matriz de orden 2×4 , $b_{ij} \in I\!R$

C Es una matriz de orden 3×2 , $c_{ij} \in \mathbb{C}$

3. NOTACIÓN

Se denota las matrices por: $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ ó (a_{ij}), $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$

donde a_{ij} es la $i-j$ ésima entrada, i = fila , j = columna.

4. ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz está dado por el producto $m\times n$, donde m indica el número de filas y n el número de columnas.

El conjunto de matrices $m\times n$ con elementos $a_{ij}\in I\!K$ se denota por $I\!K^{m\times n}$.

Es decir: $I\!K^{m\times n}=\left\{(a_{ij})\,/\,a_{ij}\in I\!K\right\}$

Si $I\!K=I\!R$, entonces $I\!R^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\,/\,a_{ij}\in I\!R\}$

Si $I\!K=\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\,/\,a_{ij}\in\mathbb{C}\}$

5. MATRICES ESPECIALES

Las matrices especiales son:

5.1) MATRIZ CUADRADA: Si $m=n$ (número de filas es igual al número de columnas), diremos que $A_n=(a_{ij})$ o $[a_{ij}]$ es una matriz cuadrada.

5.2) MATRIZ DIAGONAL: La matriz cuadrada A_n, es diagonal si $a_{ij}=0$, $\forall\, i\neq j$ y $\exists\, a_{ii}\neq 0$, $1\leq i\leq n$.

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Por lo menos algún a_{ii} es diferente de cero.

Ejemplos

a) En $I\!K^{4\times 4}$

$$A_4=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) En $I\!K^{5\times 5}$

$$B_5=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

5.3) MATRIZ IDENTIDAD: La matriz cuadrada I_n es la matriz identidad si, y sólo si $a_{ij}=0$; $\forall\, i\neq j\ \wedge\ a_{ii}=1\ \ \forall\, i$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$I_5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5.4) MATRIZ TRIANGULAR

a) La matriz cuadrada A_n es **TRIANGULAR** superior si $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

b) La matriz cuadrada A_n es **TRIANGULAR** inferior si $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

6. MATRIZ NULA

$A_{m\times n}$ es nula si, y sólo si $a_{ij} = 0 \ \forall i, \forall j$

Denotaremos por $\Theta_{m\times n}$

Ejemplo

$$\Theta_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m\times n}$ son iguales si, y sólo si, $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, \forall j$ $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$.

7.1) PROPIEDADES

Sean *A*, *B*, *C* matrices del mismo orden (elementos de $IK^{m\times n}$) se cumplen las siguientes propiedades:

P₁) $A = A$, $\forall A$

P₂) $A = B$ implica $B = A$

P₃) $A = B \wedge B = C$ implica $A = C$

8. MATRIZ TRANSPUESTA

Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ Diremos que *B* es la **TRANSPUESTA** de *A*, si sólo si $b_{ij} = a_{ji} \ \forall \ 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ y denotamos $B = A^t$ (o por ${}^tA$). Es decir:

$$A^t = B \iff b_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i, \forall j$$

B es la transpuesta de A

Indica que las filas de B son las columnas de A

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ una matriz de orden 3×4

La transpuesta de *A* es otra matriz de orden 4×3, que se obtiene intercambiando las filas por columnas.

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

8.1) PROPIEDADES

P₁ . $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ **La transpuesta de la inversa, es igual a la inversa de la transpuesta.**

P₂ . $(A+B)^t = A^t + B^t$ **Transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las transpuestas.**

P₃ . $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ **λ es una constante.**

P₄ . $(AB)^t = B^t A^t$ **La transpuesta de un producto conmuta al producto de transpuestas.**

P₅ . $I_n^t = I_n$

P₆ . $(A^t)^t = A$

9. MATRIZ SIMÉTRICA

Sea la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, A es simétrica si, y solo si, $A = A^t$

10. MATRIZ ANTISIMÉTRICA

A es antisimétrica, si $A^t = -A$

Una matriz cuadrada A es no singular si, y sólo si, su determinante es diferente de cero.

11. MATRIZ ORTOGONAL

Sea $A_n = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada no singular,

A es ortogonal, si y sólo si $A^{-1} = A^t$

11.1) PROPIEDADES

P_1 . A es ORTOGONAL $\Longleftrightarrow$ $AA^t = I_n$

P_2 . Si A y B son ortogonales $\Rightarrow AB$ es ortogonal.

12. DIAGONAL PRINCIPAL

Dada la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, se llama DIAGONAL PRINCIPAL al conjunto.

$D(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{nn})$

Ejemplo

Sea $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$D(2,4,3,0)$ es la diagonal principal de A_4 .

13. TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$, se llama TRAZA de A, al número $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$ (es la suma de los elementos de la diagonal principal)

Ejemplo

En la matriz A_4 , se tiene: $Tr(A_4) = 2 + 4 + 3 + 0$

$Tr(A_4) = 9$

13.1) PROPIEDADES:

P_1 . $Tr(\theta) = 0$

P_2 . $Tr(I_n) = n$

P_3 . $Tr(A^t) = Tr(A)$

P_4 . $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

P_5 . $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$

P_6 . $Tr(AB) = Tr(BA)$

14. MATRIZ DIAGONAL

La matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$ es DIAGONAL si, y sólo si, $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ y $\exists i, a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo

$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14.1 MATRIZ ESCALAR: Es la matriz diagonal cuyos elementos son iguales.

Ejemplo

$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

15. MATRIZ IDEMPOTENTE

Una matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$ es idempotente si, y sólo si, $A^2=A$.

16. MATRIZ NILPOTENTE

A es nilpontente, si $A^k=\theta$ para algún $k\geq 2$, θ: matriz cuadrada NULA.

17. MATRIZ INVOLUTIVA

A es involutiva, si sólo si $A_n^2=I_n$

18. MATRIZ HERMITIANA

Sea $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$

A es hermitiana si, y sólo si, $A=(\overline{A})^t$

└── Transpuesta de la conjugada de A

NOTACIÓN: Si $A=[a_{ij}]$, entonces $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$, donde $\overline{a}_{ij}$ es la conjugada de a_{ij} y $\overline{A}$ es la conjugada de A.

NOTACIÓN: $(\overline{A})^t=A^*$.

Ejemplo

Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$

Donde $\overline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1+i & 4-2i \\ 1-i & 5 & -1+i \\ 4+2i & -1-i & -3 \end{bmatrix}$ $(\overline{A})^t=\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 4+2i \\ 1+i & 5 & -1-i \\ 4-2i & -1+i & -3 \end{bmatrix}$

Se cumple $A=(\overline{A})^t$, luego A es hermitiana.

19. MATRIZ POSITIVA

Sea $A\in \mathbb{R}^{n\times n}$, A es positiva si, y sólo si, $X\,A\,X^t>0$, $\forall\, X\in \mathbb{R}^n$, $X\neq\theta$.

20. EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES

El conjunto de matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un ESPACIO VECTORIAL sobre $\mathbb{K}$. Efectivamente, en $\mathbb{K}^{m\times n}$ se definen dos operaciones:

I. SUMA DE MATRICES

$+\ :\ \mathbb{K}^{m\times n}\times \mathbb{K}^{m\times n}\longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$

$([a_{ij}],[b_{ij}])\longmapsto [a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$

tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\forall\ 1\leq i\leq m$; $\forall\ 1\leq j\leq n$

Definición: La suma de $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$ es la matriz $[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]$, de $m\times n$, tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\forall\ 1\leq i\leq m$, $\forall\ 1\leq j\leq n$.

II. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

$:\ \mathbb{K}\times \mathbb{K}^{m\times n}\longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n}$

$(\alpha,[a_{ij}])\longmapsto \alpha[a_{ij}]=[\alpha\, a_{ij}]$, $1\leq i\leq m$; $1\leq j\leq n$

Definición: El producto de un escalar α por una matriz $[a_{ij}]$ de orden $m\times n$ es una matriz $[\alpha\, a_{ij}]$ de orden $m\times n$ cuyos elementos se obtienen multiplicando el escalar α por cada elemento a_{ij} de la matriz $[a_{ij}]$.

Ejemplos

1) Supongamos que en el conjunto $\mathbb{K}^{2\times 3}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ se dan las siguientes matrices:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Dado los escalares $\alpha=2$ y $\beta=-3$, hallar:

i) $A+B$

ii) $\alpha A+\beta B$

iii) Hallar $X\in \mathbb{K}^{2\times 3}$, tal que: $\alpha A-\beta X=5\alpha-\alpha B+X$

Solución:

i) $$A+B=\begin{bmatrix}1+(-3) & 0+1 & -2+2\\ 2+1 & -3-2 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

ii) $$\alpha A+\beta B = 2A-3B$$
$$=2\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 4 & -6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & -3 & -6\\ -3 & 6 & -9\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}11 & -3 & -10\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

iii) $$\alpha A-\beta X = 5A-\alpha B+X$$
$$2A+3X = 5A-2B+X$$
$$2X = 3A-2B$$
$$X=\tfrac{1}{2}(3A-2B)$$
$$X=\tfrac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}\right)$$
$$X=\tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & 0 & -6\\ 6 & -9 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -6\end{bmatrix}\right)$$
$$X=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}9 & -2 & -10\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}9/2 & -1 & -5\\ 2 & -5/2 & 0\end{bmatrix}$$

2) Dadas las matrices $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

y el escalar $\lambda=2$.

a) Hallar la matriz $\lambda I+N$; b) ¿es inversible la matriz λI ? ; c) es nilpotente la matriz N?

Solución:

a) $$\lambda I+N=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

b) **La matriz λI es inversible porque su determinante es diferente de cero : $|\lambda I|=8$**

c) **La matriz N es nilpotente, porque** $N^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Nota **: La matriz $\lambda I+N$ se llama forma canónica de Jordan.**

20.1) PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Si A, B, C y θ son matrices del mismo orden (elementos de $I\!K^{m\times n}$), se cumplen las siguientes propiedades:

A_1)	$A+B=B+A$	conmutativa
A_2)	$(A+B)+C=A+(B+C)$	asociativa
A_3)	$\exists\,\theta\,/\,A+\theta=\theta+A=A\,,\ \forall\,A$	existencia de la matriz nula
A_4)	$\forall A\ ,\ \exists!\,B\,/\,A+B=B+A=\theta$	existencia del opuesto

Donde $B=-A$

$-A$ es el opuesto de A

20.2) PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Si λ y β son escalares y A , $B\in I\!K^{m\times n}$

Se cumplen:

E_1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

E_2) $(\lambda\beta)A=\lambda(\beta A)=\beta(\lambda A)$

E_3) $(\lambda+\beta)A=\lambda A+\beta A$

21. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Definición. El producto de $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ por $B_{n\times p}=[b_{ij}]$, se define del siguiente modo:

$$A_{m\times n}\,B_{n\times p}=C_{m\times p}=[c_{ij}]\ ,\text{ tal que } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}\quad ,\ 1\le i\le m\ ,\ 1\le j\le p$$

21.1) PROPIEDADES

M_1) $A_{m\times n}(B_{n\times p}\,C_{p\times q})=(A_{m\times n}\,B_{n\times p})\,C_{p\times q}$

M_2) $A(B+C)=AB+AC$, siempre que tenga sentido: $B+C\,,AB\,,AC$

M_2) $(B+C)\,A=BA+CA$, si tienen sentido: $B+C\,,BA$ y CA.

M_3) $I_n\,A_{n\times m}=A_{n\times m}$ o $A_{n\times m}\,I_m=A_{n\times m}$

M_4) $\theta_{p\times m}\,A_{m\times n}=\theta_{p\times n}$

M_5) $\lambda(AB)=(\lambda\,A)B=A(\lambda B)\quad ,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{C}$

Ejemplo 1 Dados las matrices: $A=\begin{bmatrix}5&3\\0&5\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}-8&0&7\\1&3&2\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\\7&1\end{bmatrix}$ Hallar: a) AB b) CA c) A^2 d) BC

Solución:

a) $$AB=\begin{bmatrix}5&3\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8&0&7\\1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(5,3)\cdot(-8,1)&(5,3)\cdot(0,3)&(5,3)\cdot(7,2)\\(0,5)\cdot(-8,1)&(0,5)\cdot(0,3)&(0,5)\cdot(7,2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-40+3&0+9&35+6\\0+5&0+15&0+10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-37&9&41\\5&15&10\end{bmatrix}$$

b) $$CA=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\\7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,0)\cdot(5,0)&(1,0)\cdot(3,5)\\(0,3)\cdot(5,0)&(0,3)\cdot(3,5)\\(7,1)\cdot(5,0)&(7,1)\cdot(3,5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+0&3+0\\0+0&0+15\\35+0&21+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\0&15\\35&26\end{bmatrix}$$

c) $$A^2=AA=\begin{bmatrix}5&3\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(5,3)\cdot(5,0)&(5,3)\cdot(3,5)\\(0,5)\cdot(5,0)&(0,5)\cdot(3,5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25+0&15+15\\0+0&0+25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&30\\0&25\end{bmatrix}$$

d) $$BC=\begin{bmatrix}-8&0&7\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\\7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-8,0,7)\cdot(1,0,7)&(-8,0,7)\cdot(0,3,1)\\(1,3,2)\cdot(1,0,7)&(1,3,2)\cdot(0,3,1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8+0+49&0+0+7\\1+0+14&0+9+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41&7\\15&11\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 Demostrar que toda matriz de segundo orden $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ satisface a la ecuación $x^2-(a+d)\,x+\operatorname{diag}(ad-bc\,,\,ad-bc)=0$.

Demostración:

Se comprueba por calculo directo. Debo desarrollar:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2-(a+d)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}a^2+ad&ab+db\\ac+dc&ad+d^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Ejemplos 3 Hallar $f(A)$, si $f(x)=x^2-x-1\quad ,\quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$

Solución:

Nota : $1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

Se tiene $\quad f(x) = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad f(A) = A^2 - A - I$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,1,1)\cdot(2,3,1) & (2,1,1)\cdot(1,1,-1) & (2,1,1)\cdot(1,2,0) \\ (3,1,2)\cdot(2,3,1) & (3,1,2)\cdot(1,1,-1) & (3,1,2)\cdot(1,2,0) \\ (1,-1,0)\cdot(2,3,1) & (1,-1,0)\cdot(1,1,-1) & (1,-1,0)\cdot(1,2,0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3+1 & 2+1-1 & 2+2+0 \\ 6+3+2 & 3+1-2 & 3+2+0 \\ 2-3+0 & 1-1+0 & 1-2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4 Dadas las matrices $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Hallar la matriz incógnita X de la ecuación $XA = B$

Solución:

Si existe A^{-1} podemos operar del siguiente modo:

$$XA = B$$

$$\Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$XI = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar A^{-1} por operaciones elementales :

Operación						
(pivote; -2 a fila 2, -1 a fila 3)	1	1	−1	1	0	0
	2	1	0	0	1	0
	1	−1	1	0	0	1
	1	1	−1	1	0	0
Por −1	0	−1	2	−2	1	0
	0	−2	2	−1	0	1
	1	1	−1	1	0	0
(pivote; -1 a fila 1, 2 a fila 3)	0	1	−2	2	−1	0
	0	−2	2	−1	0	1
	1	0	1	−1	1	0
	0	1	−2	2	−1	0
Por $-\frac{1}{2}$	0	0	−2	3	−2	1
	1	0	1	−1	1	0
	0	1	−2	2	−1	0
(pivote; -1 a fila 1, 2 a fila 2)	0	0	1	−3/2	1	−1/2
	1	0	0	1/2	0	1/2
	0	1	0	−1	1	−1 $\Leftarrow A^{-1}$
	0	0	1	−3/2	1	−1/2

Ejemplo 5

Resolver la ecuación matricial: $AXB = C$

Sabiendo que: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \; ,$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

De $AXB = C$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\, X \underbrace{BB^{-1}}_{I} = A^{-1}\, C\, B^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$$

Se debe hallar A^{-1} y B^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

Sean: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar AB y BA si existen

Solución:

1) Para poder multiplicar AB, debe cumplirse: Nº columnas de A = Nº de filas de B
   En caso contrario no existe AB
   Igualmente, para poder hallar BA, debe ser: Nº de columnas de B = Nº de filas de A

2) Veamos:

   $A_{3\times 2}\, B_{2\times 4} = C_{3\times 4}$ — Son iguales, lo cual nos indica que existe el producto A por B. Dicho producto es la matriz C de orden 3 × 4

   En cambio $B_{2\times 4}\, A_{3\times 2}$ no existe — No son iguales

3) Una forma sencilla de multiplicar A por B, es:

   1º Escribir la matriz B en la parte derecha e inferior de A.

   2º Por cada fila de A trazar líneas horizontales de izquierda a derecha y por cada columna de B trazar líneas verticales de abajo hacia arriba.

   3º En los puntos de intersección de estas rectas estarán los elementos C_{ij} que resulta de hacer producto interno de las filas de A con las columnas de B.

$$\begin{array}{rr|cccc} -3 & 2 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 1 & -1 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 2 & -1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ \hline & & 2 & 1 & 3 & 0 \\ & & -1 & -2 & -2 & 2 \end{array}$$

Donde:

$C_{11} = (-3, 2) \cdot (2, -1) = (-3)(2) + (2)(-1) = -6 - 2 = -8$
$C_{12} = (-3, 2) \cdot (1, -2) = (-3)(1) + (2)(-2) = -3 - 4 = -7$
$C_{13} = (-3, 2) \cdot (3, -2) = (-3)(3) + (2)(-2) = -9 - 4 = -13$
$C_{14} = (-3, 2) \cdot (0, 2) = (-3)(0) + (2)(2) = 0 + 4 = 4$
$C_{21} = (1, -1) \cdot (2, -1) = (1)(2) + (-1)(-1) = 2 + 1 = 3$
$C_{22} = (1, -1) \cdot (1, -2) = (1)(1) + (-1)(-2) = 1 + 2 = 3$
$C_{23} = (1, -1) \cdot (3, -2) = (1)(3) + (-1)(-2) = 3 + 2 = 5$
$C_{24} = (1, -1) \cdot (0, 2) = (1)(0) + (-1)(2) = 0 - 2 = -2$
$C_{31} = (2, -1) \cdot (2, -1) = (2)(2) + (-1)(-1) = 4 + 1 = 5$
$C_{32} = (2, -1) \cdot (1, -2) = (2)(1) + (-1)(-2) = 2 + 2 = 4$
$C_{33} = (2, -1) \cdot (3, -2) = (2)(3) + (-1)(-2) = 6 + 2 = 8$
$C_{34} = (2, -1) \cdot (0, 2) = (2)(0) + (-1)(2) = 0 - 2 = -2$

Luego: $C_{3\times 4} = \begin{bmatrix} -8 & -7 & -13 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

22. DETERMINANTE

Definición: Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n, llamaremos determinante de la matriz A, al número real que está relacionado con los elementos a_{ij} de la matriz

NOTACIÓN: $|A|$, $det(A)$ indican el determinante de la matriz cuadrada A.

La definición formal de determinante es como sigue:

$$\det : \ \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

El determinante es una función de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en $\mathbb{R}$, tal que **det** hace corresponder a cada matriz A un único número real **det** A, que por inducción se define del siguiente modo:

1) Para $n = 1$, $A = [a_{11}]$; entonces $\det(A) = a_{11}$

2) Para $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; entonces $\det(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$

3) Para $n = 3$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; entonces:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En general:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det A\,(1/j)$$

$A(1/j)$ es submatriz de A eliminando la fila 1 y la j-esima columna

FÓRMULA DE LAPLACE

OBSERVACIÓN. El determinante de orden 3, se puede desarrollar por el método práctico de **SARRUS**:

Así: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_{\substack{a \;\; b \;\; c \\ d \;\; e \;\; f}} = (aei + dhc + gbf) - (dbi + ahf + gec)$

El método de Sarrus, sólo se aplica a determinantes de 3 × 3.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}_{\substack{3 \;\; -1 \;\; -2 \\ -2 \;\; 2 \;\; -3}} = (-12 - 4 + 12) - (-4 + 9 - 16) = 7$$

PROPIEDADES

1) $|I_n| = 1$, $|\theta_n| = 0$

2) $|A^T| = |A|$

3) $|AB| = |A|\,|B|$

4) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5) $|A^m| = |A|^m$, $m \in Z^+$

6) **Si se intercambian 2 filas o 2 columnas el determinante cambia de signo.**

7) **Si una fila o columna se multiplica por una constante, entonces el determinante queda multiplicada por dicha constante:** $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

8) **Si a una fila (columna) se le multiplica por una constante y se suma a otra fila (columna), el determinante NO VARÍA.**

9) **Si una fila o columna de la matriz tiene todos sus elementos nulos, el determinante es O.**

10) **Si 2 filas o columnas son proporcionales, el determinante es O.**

11) **Si** $A = [a_{ij}]_n$ **es TRIANGULAR, entonces el determinante es:**

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots\ldots a_{nn}$$

12)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \cdots\cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots a_{n2} \end{vmatrix}$$

23. RANGO DE UNA MATRIZ

Definición: Sea la matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, diremos que el rango de la matriz A es "p" si existe una submatriz cuadrada B de A de orden "p", tal que, $|B|\neq 0$ y el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A de orden mayor que B es cero.

NOTACIÓN: Si $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, denotamos $\rho(A)=p$ para indicar el rango de la matriz A.

PROPIEDADES: Si $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ es una matriz de orden $m\times n$, se cumplen:

1) $\rho(A)\le \min(m,n)$ 2) $\rho(A^T)=\rho(A)$

3) Si $A=[a_{ij}]_n$ implica $\rho(A)<n$, si y sólo si, $|A|=0$

23.1 OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE LAS FILAS DE UNA MATRIZ

Una forma práctica de hallar: el rango de una matriz, la inversa de una matriz, el determinante de una matriz y la solución de un sistema de ecuaciones lineales; es reduciendo una matriz dada en otra matriz equivalente, pero más simple, haciendo operaciones elementales sobre las filas de la matriz dada.

Las operaciones elementales que se hacen sobre las filas de una matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, son:

1) Permutar dos filas
2) Multiplicar a una fila por un escalar
3) Sumar a una fila el múltiplo de otra fila. Combinando estas operaciones elementales se reduce la matriz A hasta convertirla en otra matriz equivalente simple, similar a la siguiente matriz.

$$F.C.(A)=\begin{bmatrix} I_p & N_{p\times(n-p)} \\ N_{(m-p)\times p} & N_{(m-p)\times(n-p)} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

donde: I_p es una matriz identidad de orden p

$N_{(m-p)\times p}$ es matriz NULA.

Forma canónica de la matriz A.

23.2 EQUIVALENCIA DE MATRICES

Diremos que la matriz $B_{m\times n}$ es equivalente a la matriz $A_{m\times n}$, si y sólo si, B puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A.

NOTACIÓN: $B\sim A$ se lee "B es equivalente a A"

23.3 Como $A\sim F.C.(A)$, entonces $\rho(A)=\rho(F.C.(A))=p=$ N° de vectores canónicos = N° de vectores filas no nulas. En general, si $A\sim B$, entonces $\rho(A)=\rho(B)$.

Reducir una matriz A a la forma canónica consiste en convertirla en otra matriz sencilla, en el cual, los elementos de la diagonal principal, de arriba hacia abajo, son "1" y "0". Además, los elementos que están debajo de la diagonal principal deben ser ceros.

Se empieza convirtiendo el primer elemento a_{11} en la unidad y los elementos que están debajo de a_{11} convertirlas en cero.

Ejemplo.

a) Hallar el rango de $A=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Nuestro objetivo principal es que los elementos de la diagonal principal se conviertan en la unidad y los elementos que estén debajo y/o encima de los 1, sean ceros.

Veamos:

1ra. ITERACIÓN

Elemento pivote

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{-1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} (2)$$

1ª ITERACIÓN: Multiplicar por −1 la 2ª fila y permutar con la 1ª Fila

2ª ITERACIÓN: Multiplicar por 2 a la 1ª fila y sumar a la 2ª fila; luego a la 3ª Fila

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{por } \tfrac{1}{6}$$

3ª ITERACIÓN: Multiplicar por $\frac{1}{6}$ a la 2ª Fila.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} (-1)(-3)$$

4ª ITERACIÓN: Multiplicar por(−1) la 2ª Fila y sumar a la 1ª Fila luego multiplicar la 2ª fila por −3 y sumar a la 3ª Fila

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONCLUSIÓN:

Los vectores filas no nulas son $\{(1, 0, -1, 1/3), (0, 1, 0, -1/3)\}$

Los vectores columnas canónicas son $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Por tanto: $\rho(A) = 2$ ← número de filas NO NULAS

23.4 MATRIZ NO SINGULAR: Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$ de orden "n" es no singular $\iff \rho(A) = n \iff |A| \neq 0$

23.5 EJEMPLO: Las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ tienen inversa, porque $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$.

INVERSA DE UNA MATRIZ

23.6 EXISTENCIA DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$ tiene inversa $\iff \rho(A) = n \iff |A| \neq 0$

23.6.1 Sea $A_n = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada $n \times n$. Se dice que A es ***invertible*** o ***no singular*** si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = BA = I_n$.
La matriz B se conoce como ***inversa*** de A y se denota con A^{-1}.

23.6.2 Propiedades

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

5) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad \forall\, n \in Z^+$ donde $\begin{cases} A^0 = I \\ A^n = A \cdot A^{n-1}, & n \in Z^+ \end{cases}$

6) $I^{-1} = I$, I = identidad

23.7 TEOREMA DE EXPANSIÓN DE LAPLACE O MÉTODO DE LOS MENORES COMPLEMENTARIOS.

Sea la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, definimos:

a) $A(i/j)$ es la submatriz cuadrada que se obtiene eliminando la i–ésima fila y la j–ésima columna.

b) $|A(i/j)|$ es el i–jésimo menor complementario.

c) $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A(i/j)|$ es el i–jésimo **COFACTOR**.

Ejemplo : Sea $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

a) $A(2/3) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $|A(2/3)| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

$(-1)^{2+1}(3) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 81$

c) $\alpha_{23} = (-1)^{2+3}|A(2/3)| =$

$= -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -81$

Conocido los conceptos a), b) y c); estamos preparados para hallar el determinante de una matriz por menores complementarios.

Dada la matriz cuadrada $A_n = [a_{ij}]$, el determinante de A_n es el número real:

$$|A| = a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + a_{i3}\,\alpha_{i3} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}\,\alpha_{in} \quad \longleftarrow ①$$

o

$$|A| = a_{1j}\,\alpha_{1j} + a_{2j}\,\alpha_{2j} + a_{3j}\,\alpha_{3j} + \ldots\ldots\ldots + a_{nj}\,\alpha_{nj} \quad \longleftarrow ②$$

Donde ① es el desarrollo por cualquier fila de la matriz y ② es el desarrollo por cualquier columna.

Sugerencia: Para calcular un determinante, por menores complementarios, conviene desarrollarse por la fila o columna que tenga más ceros.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-7)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

desarrollar por la fila 3, por tener más ceros.

$$= 3\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{matrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{matrix}$$

$$= 3\{[0-50-3]-[0+6-20]\} - \{[40-30-24]-[200+6+24]\}$$

$$= 3[-53-(-14)] - 7[-14-230] = 1591$$

23.8 ADJUNTA DE UNA MATRIZ

Definición: Sea la matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$ y sea $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A(i/j)|$.

Llamaremos ADJUNTA de A (denotado por $adj(A)$) a la matriz: $[\alpha_{ij}]^T$, es decir:

$$\boxed{adj(A)=[\alpha_{ij}]^T}\ ,\ \text{donde } [\alpha_{ij}]=cof\ A$$

Adjunta de A es igual a la TRANSPUESTA del COFACTOR de A

23.9 TEOREMA:

Sea la matriz cuadrada $A=[a_{ij}]_n$, tal que $|A|\neq 0$, entonces:

$$A\cdot adj(A) = |A|\cdot I$$

Producto de la matriz A por su adjunta — Determinante de la matriz A por la matriz identidad I

PRUEBA

1) Se tiene $A=[a_{ij}]_n$ y $adj(A)=[\alpha_{ij}]^T$

Donde: a) $[\alpha_{ij}]$ es la matriz COFACTOR de A

b) $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A(i/j)|$

α_{ij} es el determinante de la submatriz $A(i/j)$ con signo $(-1)^{i+j}$. La matriz $A(i/j)$ se obtiene después de anular la i–ésima fila y la j–ésima columna.

α_{ij} es un elemento de la matriz $[\alpha_{ij}]$.

c) $[\alpha_{ij}]^T$ es la TRANSPUESTA de $[\alpha_{ij}]$. Por tanto: si α_{ij} es un elemento de $[\alpha_{ij}]$, entonces α_{ji} es un elemento de $[\alpha_{ij}]^T$.

es la TRANSPUESTA de la matriz $[\alpha_{ij}]$

2) El producto de A por $adj(A)$ es otra matriz $[c_{ij}]$ cuyos elementos c_{ij} son de la forma:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{jk}\,.$$

Es decir $\boxed{A\cdot adj(A)=[c_{ij}]\ ,\ \text{tal que } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{jk}}$

Donde: a) Si $j=i \Rightarrow c_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{ik}=\sum (-1)^{i+k} a_{ik}\det A_{ik}=\det(A)\,,\ \forall i$

b) Si $j\neq i \Rightarrow c_{ij}=0$

3) Por tanto:

$$A\cdot adj(A)=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: Pruebe con una matriz A_3.

23.10 COROLARIO: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$, si $|A|\neq 0$.

PRUEBA

1) Si $|A| \neq 0$, por el teorema dado en 23.9, se tiene: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

2) Por definición de inversa: si A^{-1} es la inversa de A, implica que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

3) Multiplicar por A^{-1}, por izquierda, en ambos miembros de (1)

$$A^{-1}(A \cdot adj(A)) = A^{-1}(|A| \cdot I)$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)} \cdot adj(A) = |A|(A^{-1} \cdot I)$$

$$\underbrace{I \cdot adj(A)} = |A| \cdot A^{-1}, \text{ pues } A^{-1}.\,I = A^{-1}$$

$$adj(A) = |A| \cdot A^{-1}$$

$$\frac{1}{|A|}\, adj(A) = A^{-1}, \text{ pues } |A| \text{ es un escalar diferente de cero.}$$

23.11 PROPIEDADES

$P_1)$ $adj(I) = I$

$P_2)$ $adj(A^T) = (adj(A))^T$, si $|A| \neq 0$

$P_3)$ $adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1}$

$P_4)$ $adj(AB) = adj(B) \cdot adj(A)$, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

$P_5)$ $adj(A^n) = (adj(A))^n$

$P_6)$ $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1}\, adj(A)$, $\lambda \in C$

$P_7)$ $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

$P_8)$ $|adj(\lambda A)| = (\lambda^{n-1})^n\, |A|^{n-1}$

$P_9)$ $|adj(A^n)| = |A^{n-1}|^n$

$P_{10})$ $|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)^2}$

Sugerencia: Estas propiedades se demuestran aplicando el corolario: $adj(A) = |A| \cdot A^{-1}$.

24. PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix}$

Solución:

A) 5 b) 16 c) 1 d) 0 e) -1 si $w = e^{i2\pi/3}$

02 Calcular:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$,

si $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}$ si $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) 1 , b) -2 , c) $2a^2(a+x)$, d) 0 , e) $-3\sqrt{3}\,i$, f) -3

03 Resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$

$$\text{c)}\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

a) $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; ...... ; $x_{n-1} = a_{n-1}$

b) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; ...... ; $x_{n-1} = n-2$

c) $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$; ...... ; $x_{n-1} = a_{n-1}$

04 Calcular el determinante:

$$\text{a)}\quad \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \\ \phi^2 & (\phi+1)^2 & (\phi+2)^2 & (\phi+3)^2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

Solución:

a) 0 b) $x^2 Z^2$

c) Calcular la matriz X si: $A^{-1} X^{-1} B = C^{-1}$

donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

05 Hallar la inversa de cada uno de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Respuestas:

a) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

06 Hallar la matriz inversa de A:

$$\text{a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \cdots & 2n-5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde: } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\, sen\frac{2\pi}{n}$$

Respuestas:

$$\text{a)}\quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\quad A^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \cdots & \varepsilon^{-n+1} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \cdots & \varepsilon^{-2n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{-n+1} & \varepsilon^{-2n+2} & \cdots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\quad A^{-1} = \frac{1}{2n^3}\begin{bmatrix} 2-n^2 & 2+n^2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2-n^2 & 2+n^2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2+n^2 & 2 & 2 & \cdots & 2-n^2 \end{bmatrix}$$

07 Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, determinar AX para cada uno de los siguientes valores de X.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

08 Sea $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$ una matriz de $m \times n$: Sea $B = (b_{jk})$, $j = 1, 2, \ldots, n$
$j = 1, \ldots, n$ $k = 1, 2, \ldots, s$

una matriz $n \times s$. Sea $AB = C$. Demostración que la columna K de C^k se puede escribir como: $C^k = b_{1k}A^1 + \ldots\ldots + b_{nk}A^n$

09 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sea $N = A - I_n$

a) Demostrar que $N^{n+1} = \mathbf{O}$,

b) Demostrar que A es invertible y que su inversa es:
$(I + N)^{-1} = I - N + N^2 - \ldots + (-1)^n N^n$

10 Si N es una matriz cuadrada tal que $N^{r+1} = \mathbf{O}$ para algún entero positivo r, demostrar que $I - N$ es invertible y que su inversa es $I + N + \ldots\ldots + N^r$.

25. PROBLEMAS RESUELTOS

(01) Sea A_n una matriz cuadrada, entonces AA^T es simétrica.

Prueba:

Debo probar que $(AA^T)^T = AA^T$

Veamos: $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = A\,A^T$

Por tanto: AA^T es simétrica

(02) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^T$ es simétrica.

Prueba:

Debo probar que $(A + A^T)^T = A + A^T$

Veamos: $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$

(03) Si A es una matriz cuadrada entonces $A - A^T$ es antisimétrica.

Prueba:

Debo probar: $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$

Veamos: $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$

(04) Toda matriz cuadrada es igual a la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

Prueba:

1. $A + A^T$ es simétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica.
2. $A - A^T$ es antisimétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A - A^T)$ es antisimétrica
3. Luego: $\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A$

(05) Sea A una matriz cuadrada, si A es involutiva entonces $\frac{1}{2}(I - A)$ es idempotente.

Prueba:

Debo probar que $\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{2}(I - A)$

Veamos:

$\left[\frac{1}{2}(I - A)\right]^2 = \frac{1}{4}(I - A)(I - A)$
$= \frac{1}{4}(I \cdot I - I \cdot A - A \cdot I + A \cdot A)$
$= \frac{1}{4}(I - A - A + A^2)$
$= \frac{1}{4}(I - 2A + I)$ .... Pues $A^2 = I$ porque A es involutiva.
$= \frac{1}{4}(2I - 2A)$
$= \frac{1}{2}(I - A)$

Sobre Adjuntas:

Del teorema:

$A \cdot Adj(A) = |A| \cdot I$ → $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$; → $Adj(A) = |A| \cdot A^{-1}$

(06) Probar: $adj(I) = I$

Prueba: $Adj(I) = |I| \cdot I^{-1} = 1 \cdot I = I$

(07) Probar: $adj(A^T) = (adj\,A)^T$, si $|A| \neq 0$

Prueba:

$adj(A^T) = |A^T|(A^T)^{-1}$
$= |A|(A^{-1})^T$, pues $\begin{cases} |A^T| = |A| \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \\ (\lambda A)^T = \lambda A^T \end{cases}$
$= (|A|A^{-1})^T$
$= (adj(A))^T$

(08) Probar: $adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1}$, $|A| \neq 0$

Prueba:

$$\begin{aligned} adj(A^{-1}) &= |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} \\ &= |A|^{-1}(A^{-1})^{-1} \quad \ldots \text{ pues: } \\ &= (|A|A^{-1})^{-1} \qquad |A^{-1}| = |A|^{-1} \\ &= (adj(A))^{-1} \end{aligned}$$

(09) Probar: $adj(AB) = adj\,B \cdot adj\,A$, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

Prueba:

$$\begin{aligned} adj(AB) &= |AB|(AB)^{-1} \\ &= |A|\,|B|\,(B^{-1}A^{-1}) \\ &= (|B|\,B^{-1})(|A|\,A^{-1}) \\ &= adj\,B \cdot adj\,A \end{aligned}$$

(10) $adj(A^n) = (adj\,A)^n$

Prueba:

$$\begin{aligned} adj(A^n) &= |A^n|(A^n)^{-1} \\ &= |A|^n(A^{-1})^n \\ &= (|A|A^{-1})^n \\ &= (adj\,A)^n \end{aligned}$$

(11) Probar: $adj(\lambda A) = \lambda^{n-1} \cdot adj(A)$; $\lambda \in \mathbb{C}$

Prueba:

$$\begin{aligned} adj(\lambda A) &= |\lambda A|(\lambda A)^{-1} \\ &= \lambda^n |A|\, \lambda^{-1} A^{-1} \\ &= \lambda^{n-1}(|A|A^{-1}) \\ &= \lambda^{n-1} \cdot adj(A) \end{aligned}$$

(12) Probar: $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

Prueba:

$|adj(A)| = ||A|\,A^{-1}| = |A|^n\,|A|^{-1} = |A|^{n-1}$

pues $|A|^{-1} = |A^{-1}|$

(13) Probar: $|adj(\lambda A)| = (\lambda^{n-1})^n |A|^{n-1}$

Prueba:

$$\begin{aligned} |adj(\lambda A)| &= |\lambda^{n-1}\,adj(A)| && ;\ \text{por } 11 \\ &= (\lambda^{n-1})^n\,|adj(A)| \\ &= (\lambda^{n-1})^n\,|A|^{n-1} && ;\ \text{por } 12 \end{aligned}$$

(14) Probar: $|adj(A^n)| = |A^{n-1}|^n$

Prueba:

$$\begin{aligned} |adj(A^n)| &= |(adj(A))^n| && ;\ \text{por } 10 \\ &= |adj(A)|^n && ;\ \text{pues } |A^n| = |A|^n \\ &= (|A|^{n-1})^n && ;\ \text{por } 12 \\ &= |A^{n-1}|^n && ;\ \text{pues } |A|^{n-1} = |A^{n-1}| \end{aligned}$$

(15) Probar: $|adj(adj\,A)| = |A|^{(n-1)^2}$

Prueba:

Hallemos: $adj(adj\,A)$

$$\begin{aligned} adj(adj\,A) &= |adj\,A|\,(adj\,A)^{-1} \\ &= |A|^{n-1}(adj(A^{-1})) && ;\ \text{por 8 y 12} \\ &= |A|^{n-1}(|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}) \\ &= |A|^{n-1} \cdot \tfrac{1}{|A|} \cdot A \\ &= |A|^{n-2} \cdot A \end{aligned}$$

Hallar el determinante:

$$\begin{aligned} |adj(adj\,A)| &= ||A|^{n-2} \cdot A| \\ &= (|A|^{n-2})^n\,|A| \\ &= |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2} \end{aligned}$$

(16) Si A y B son matrices cuadradas de orden n y poseen inversa, demostrar:

$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

Prueba:

1. Si A tiene inversa, entonces existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$ y $A^{-1} \cdot A = I$.

2. Aplicar la propiedad: $IB = BI = B$

3. Partir del 1er miembro para llegar al 2do miembro:

$$\begin{aligned} (A+B)A^{-1}(A-B) &= (A+B)\,[A^{-1}(A-B)] \\ &= (A+B)\,[A^{-1}A - A^{-1}B] \\ &= (A+B)\,[I - A^{-1}B] \\ &= (A+B)\,I - (A+B)\,A^{-1}B \\ &= (A+B) - (AA^{-1})\,B - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - I \cdot B - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - B \cdot I - (BA^{-1})B \\ &= (A+B) - B\,(A^{-1}A) - (BA^{-1})B \\ &= I\,(A+B) - (BA^{-1})\,A - (BA^{-1})B \\ &= I\,(A+B) - (BA^{-1})(A+B) \quad , \text{ factorizar } (A+B) \text{ por la derecha} \\ &= (I - BA^{-1})\,(A+B) \\ &= (AA^{-1} - BA^{-1})\,(A+B) \quad , \text{ factorizar } A^{-1} \text{ por la derecha} \\ &= (A-B)A^{-1}\,(A+B) \end{aligned}$$

(17) Si: $\begin{cases} AB = I = BA \iff B = A^{-1} \\ A^n = \theta \end{cases}$

Demostrar: $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$

↳ Indica: la inversa de $I - A$ es $I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$

Prueba:

1. Si $I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ es la inversa de $I - A$, deberá cumplirse que:

$$\underbrace{(I-A)\,(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1})}_{(*)} = \underbrace{(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1})(I-A)}_{(**)} = I$$

2. Desarrollar (*):

$$\begin{aligned} (I-A)(I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) &= I + A + \ldots + A^{n-1} - (A + A^2 + \ldots + A^n) \\ &= I - A^n \\ &= I - \theta \quad , \ \theta: \text{ es la matriz cuadrada NULA.} \\ &= I \end{aligned}$$

3. Desarrollar (**):

$$(I+A+A^2+\ldots+A^{n-1})(I-A) = I+A+A^2+\ldots+A^{n-1}-(A+A^2+\ldots+A^n)$$
$$= I-A^n$$
$$= I-\theta \quad , \quad A^n=\theta$$
$$= I$$

4. Conclusión: $I+A+A^2+\ldots+A^{n-1}$ es la inversa de $(I-A)$.

Es decir $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\ldots+A^{n-1}$

(18) Si A es una matriz cuadrada de orden "n" tal que $A^k=\theta$, simplificar: $I+2A+3A^2+4A^3+\ldots+(k-1)A^{k-2}+kA^{k-1}$

Solución:

1. Sea $S=I+2A+3A^2+\ldots+(k-1)A^{k-2}+kA^{k-1}$

2. Multiplicar por $(I-A)$ en ambos miembros de 1:

$$(I-A)S = I+2A+3A^2+\ldots+kA^{n-1}-(A+2A^2+3A^3+\ldots+kA^k)$$
$$= I+A+A^2+\ldots+A^{k-1}-k\underbrace{A^k}_{\theta} \; , \; A^k=\theta$$
$$= I+A+A^2+\ldots+A^{k-1}$$
$$(I-A)S = (I-A)^{-1} \quad , \quad \text{por 17:} \quad I+A+\ldots+A^{k-1}=(I-A)^{-1}$$

3. $\underbrace{(I-A)^{-1}(I-A)}_{I}S=(I-A)^{-1}(I-A)^{-1}$

$$IS = ((I-A)^{-1})^2$$
$$S = [(I-A)^{-1}]^2$$

(19) Si A y B son matrices cuadradas no singulares, entonces la inversa del producto A por B es igual al producto de las inversas de A y B en orden permutado, esto es: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Prueba:

1. Si A es no singular, entonces A tiene inversa que denotamos por A^{-1} / $AA^{-1}=A^{-1}A=I$
2. Si B es no singular, entonces B tiene inversa que denotamos por B^{-1} tal que, $BB^{-1}=B^{-1}B=I$.
3. El enunciado afirma: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4. Debo probar dos igualdades: $(AB)(B^{-1}A^{-1})=I \;\wedge\; (B^{-1}A^{-1})(AB)=I$

Veamos: a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$$= A(I)A^{-1}$$
$$= (AI)A^{-1}$$
$$= AA^{-1}=I$$

b) $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B$

$$= B^{-1}(I)B$$
$$= B^{-1}(IB)$$
$$= B^{-1}B$$
$$= I$$

5. Por tanto: $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, esto es $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(20) Sea $M=I-X(X^TX)^{-1}X^T$ con $X=[x_{ij}]_{n\times 1}$ dado $p\in\mathbb{Z}^+$, simplificar: $I+M+M^2+M^3+M^4+\ldots+M^p$

Solución:

1. $M\bullet M=(I-X(X^TX)^{-1}X^T)(I-X(X^TX)^{-1}X^T)$

$$= I-X(X^TX)^{-1}X^T-X(X^TX)^{-1}X^T+X\underbrace{(X^TX)^{-1}X^TX}_{I}(X^TX)^{-1}X^T$$
$$= I-\underbrace{X(X^TX)^{-1}X^T-X(X^TX)^{-1}X^T+X(X^TX)^{-1}X^T}_{\theta}$$
$$= I-X(X^TX)^{-1}X^T$$
$$M^2=M$$

2. $M^3 = M\,M^2 = M\bullet M = M^2=M$ | $M^p = M\bullet M^{p-1} = M\bullet M = M^2=M$

3. Luego: $I+M+M^2+M^3+\ldots+M^{p-1}=$

$$= I+\underbrace{M+M+M+\ldots+M}_{pM}$$
$$= I+pM$$

(21) Si A, B, C son matrices cuadradas y se cumplen: $A = BC$ y $A + B = I$, hallar $AC - C$

Solución:

1. De $A + B = I \Rightarrow A = I - B$, multiplicar C por la derecha.
2. $AC = (I - B)C$
   $= IC - BC$
   $AC = C - A$
   $AC - C = -A$

(22) Sean A y B matrices simétricas.
a) Demostrar que $A + B$ es simétrica.
b) Demostrar que AB es simétrica, si y sólo si $AB = BA$

Prueba:

a) Debo probar que $(A + B)^T = A + B$, para afirmar que $(A + B)$ es simétrica
Veamos:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$= A + B \text{, pues } \begin{cases} A^T = A \\ B^T = B \end{cases} \text{ porque } A \text{ y } B \text{ son simétricos}$$

b) La demostración consiste en probar dos condicionales:

i) Sean A y B simétricas, si AB es simétrica $\Rightarrow AB = BA$

ii) Sean A y B simétricas, si $AB = BA \Rightarrow AB$ es simétrica.

Prueba de *i)* Debo probar que $AB = BA$

1) Si A y B son simétricas, entonces $\begin{cases} A = A^T \\ B = B^T \end{cases}$
2) Si AB es simétrica, entonces $(AB)^T = (AB)$
3) Pero $(AB)^T = B^T A^T$
4) Al sustituir las igualdades dadas en 2) y 1) en 3), obtenemos: $AB = BA$

Prueba de *ii)* Debo probar que $(AB)^T = AB$

1) Si A y B son simétricas, entonces $\begin{cases} A = A^T \\ B = B^T \end{cases}$
2) Por hipótesis, se tiene $AB = BA$
3) Pero $(AB)^T = B^T A^T$
4) $= BA$ por 1)
   $= AB$ por 2)

(23) Demostrar que si $AB = AC$ y A es matriz no singular, entonces $B = C$

Prueba:

1. Como A es no singular, entonces A tiene inversa, que es A^{-1}, tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. En $AB = AC$, multiplica por A^{-1} por la izquierda en ambos miembros.

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$
$$IB = IC$$
$$B = C$$

(24) Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si A es inversible, entonces: $det(B) = det(A^{-1}BA)$

Prueba:

Partir de $det(A^{-1}BA)$, aplicar sucesivamente la propiedad: $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

Veamos:

$$det(A^{-1}BA) = det(A^{-1}(BA))$$
$$= det(A^{-1}) \cdot det(BA)$$
$$det(A^{-1}BA) = det(A^{-1})\,(det\, B \cdot det\, A)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } A \text{ es inversible} \\ \text{entonces } det(A) \neq 0 \text{ y} \\ det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,(A)}\end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{det\,A} \cdot det\, B \cdot det(A) \\ \\ = det\, B \end{array}$$

(25) Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 = A$, demostrar que:
$(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$. $\forall\, k \in Z^+$

Prueba: (Por inducción)

1. Para $k = 1$
   El 1er. miembro es $A + I$
   El 2do. miembro es $I + (2 - 1)A = I + A$
   Es verdadero: $A + I = I + A$
2. Para $k = n$ suponer que se cumple:
   $(A + I)^n = I + (2^n - 1)A$
3. Debo probar que, para $k = n + 1$, se cumple la igualdad:
   $(A + I)^{n+1} + 1 = I + (2^{n+1} - 1)A$

Veamos:

$$(A + I)^{n+1} = (A + I)(A + I)^n$$
$$= (A + I)(I + (2^n - 1)A) \quad \ldots\ldots \text{, ver paso 2)}$$
$$= A \cdot I + (2^n - 1)A^2 + I + (2^n - 1)A$$
$$= A + (2^n - 1)A + I + (2^n - 1)A \quad , \quad A^2 = A$$
$$= I + (A + (2^n - 1)A + (2^n - 1)A) \ldots\ldots \text{ conmutar la suma } A \text{ con } I.$$
$$= I + (1 + 2^n - 1 + 2^n - 1)A \ldots\ldots \text{ factorizar } A \text{ por la derecha.}$$
$$= I + (2 \cdot 2^n - 1)A$$
$$= I + (2^{n+1} - 1)A$$

(26) Determinar las matrices $A_{2 \times 2}$ tales que $A^2 = \theta$.

Solución:

1. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

Porque:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A^2} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

2. Igualando los elementos de A^2 con los elementos de θ.

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b} \\ ab + bd = 0 \Rightarrow b(a + d) = 0 \Rightarrow b = 0 \;\vee\; d = -a \\ ca + dc = 0 \Rightarrow c(a + d) = 0 \Rightarrow c = 0 \;\vee\; d = -a \\ cb + d^2 = 0 \Rightarrow cb + a^2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{a^2}{b} \end{cases}$$

3. Luego: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \forall\, a, b \neq 0 \\ \text{si } b = 0 \Rightarrow a = 0 \end{array}$

   Se cumple: $tr(A) = a + (-a) = 0$

(27) Hallar la forma general de las matrices cuadradas de orden 2 que satisfacen $A^2 = I$

Solución: En el problema 26 hacemos:

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \Rightarrow c = \frac{1 - a^2}{b} \\ ab + bd = 0 \Rightarrow b(a + d) = 0 \Rightarrow b = 0 \vee d = -a \\ ca + dc = 0 \Rightarrow c(a + d) = 0 \Rightarrow c = 0 \vee d = -a \\ cb + d^2 = 1 \Rightarrow cb + a^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1 - a^2}{c} \end{cases}$$

Luego: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1 - a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, $\forall\, a \in I\!R$, $b \neq 0$, $b \in I\!R$

Además, se cumple: $tr(A) = 0$.

(28) Hallar una matriz A de orden 2×2 tal que: $A^2 = -I$

Solución: Es similar a 27

La forma general de A es: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$. Si $a = 0$, $b = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Además, se cumple: $tr(A) = 0$

(29) Sea la matriz $A_{n \times n}$, tal que, $tr(AA^T) = 0$. Probar que $A = \theta$

<u>Prueba:</u>

1. Sea $A = [a_{ij}]$ y $A^T = [b_{ij}] / b_{ij} = a_{ji}\ \forall i\ \forall j$
2. $A \cdot A^T = C = [c_{ij}] / c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

   $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk}$
3. Los elementos de la diagonal de C, son: $C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$
4. La traza de AA^T es: $tr\,(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$
5. Como $tr(AA^T) = 0$

   $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0$

   $\Rightarrow \underbrace{c_{11}} + \underbrace{c_{22}} + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots} + \underbrace{c_{nn}} = 0$

   $(a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2) + \ldots\ldots\ldots + (a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2) = 0$

   que es lo mismo: $\sum a_{ij}^2 = 0$, $\forall i\ \forall j$ y esto se cumple, sólo cuando los $a_{ij} = 0\ \forall i\ \forall j$
6. Por tanto: $A = \theta$

(30) $\forall\, A, B$ matrices cuadradas, probar que:

a) $tr(AB) = tr(BA)$ b) $tr(BAB^{-1}) = tr\,(A)$, $\forall\, B$ invertible.

<u>Prueba de *a*):</u>

1. $AB = [a_{ij}][b_{ij}] = C = [c_{ij}] / c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}$
2. $BA = [b_{ij}][a_{ij}] = D = [d_{ij}] / d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$
3. En 1. los elementos de la diagonal son $c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki}$ y por tanto la traza de AB será:

   $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right)$
4. En 2. los elementos de la diagonal de BA son $d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\, a_{ki}$ y

   $tr\,(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \right)$
5. Se cumple: $\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \Longleftrightarrow tr\,(AB) = tr\,(BA)$

   Pues:

   $$\begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \ldots + a_{2n}b_{n2} \\ c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + \ldots + a_{3n}b_{n3} \\ \quad\vdots \\ c_{nn} = a_{n1}b_{1n} + c_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{cases}$$

   $$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \quad d_{11} \quad + \quad d_{22} \quad + \quad d_{33} \quad + \ldots + \quad d_{nn}$$

b) Queda como ejercicio.

(31) Encontrar una matriz triangular superior A tal que $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$

Solución:

Elegir $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, hallar A^3 e igualar. Se obtiene $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(32) Demostrar que la matriz $A_{n\times n}$ es involutiva, si y sólo si, $(I - A)(I + A) = \theta$

Prueba:

($\Rightarrow$) Si A es involutiva, implica que, $(I - A)(I + A) = \theta$

Veamos:

1. Si A es involutiva $\Rightarrow A^2 = I$
2. Desarrollar: $(I - A)(I + A) = I^2 + IA - AI - A^2$
   $= I + A - A - I \;\;,\;\; A^2 = I$
   $= \theta$

($\Leftarrow$) Si $(I - A)(I + A) = \theta$, implica que $A^2 = I$

Veamos:

1. Al desarrollar: $(I - A)(I + A) = I^2 + IA - AI - A^2$
   $= I + A - A - A^2$
   $= I - A^2$
2. Como $I - A^2 = \theta$
   $\Rightarrow A^2 = I$, lo cual indica que A es involutiva.

(33) Demostrar que A y B son permutables, si y sólo si $A - aI$ y $B - aI$ son permutables, cualquiera que sea el escalar a.

Prueba:

($\Rightarrow$) Si $AB = BA \Rightarrow (A - aI)(B - aI) = (B - aI)(A - aI)$

Veamos:

$$
\begin{aligned}
(A - aI)(B - aI) &= A(B - aI) - aI(B - aI) \\
&= AB - A(aI) - aIB + a^2I^2 \\
\text{Pero } AB = BA: \quad &= BA - aIB - aIA + a^2I^2 \\
&= BA - B(aI) - aIA + a^2I^2 \\
&= B(A - aI) - aI(A - aI) \\
&= (B - aI)(A - aI)
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Si $A - aI$ y $B - aI$ son permutables implica que A y B permutan.

Veamos:

Como $A - aI$ y $B - aI$ permutan, entonces se cumple que:

$$
\begin{aligned}
(A - aI)(B - aI) &= (B - aI)(A - aI) \\
AB - A(aI) - aI(B) + a^2I^2 &= BA - B(aI) - aI(A) + a^2I^2 \\
AB - aA - aB + a^2I &= BA - aB - aA + a^2I \\
&= BA - aA - aB + a^2I \\
AB &= BA
\end{aligned}
$$

Indica que A y B permutan.

(34) Demostrar que si A es no singular e idempotente entonces $A = I$

Prueba:

1. Si es no singular, entonces $|A| \neq 0$ y por lo tanto $A \neq \theta$.
2. Si A es idempotente, entonces $A^2 = A$
3. De $A^2 = A$
   $\Rightarrow A^2 - A = \theta$
   $\Rightarrow A(A - I) = \theta$
   Como $A \neq \theta$, entonces $A - I = \theta$
   $\Rightarrow A = I$

(35) Demostrar que si $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ son matrices idempotentes y permutables entonces AB es idempotente.

Prueba:

Debo probar que $(AB)^2 = AB$

Veamos:

Por hipótesis, se tiene:

1. A y B son idempotentes $\Rightarrow \begin{cases} A^2 = A \\ B^2 = B \end{cases}$
2. A y B son permutables $\Rightarrow AB = BA$
3. $(AB)^2 = (AB)(AB)$

$$
\begin{aligned}
&= (BA)(AB) && \text{por 2}\\
&= B(AA)B\\
&= BA^2B\\
&= B\,A\,B && \text{por 1}\\
&= (BA)B && \text{Asociativa}\\
&= (AB)B && \text{por 2}\\
&= A(BB) && \text{Asociativa}\\
&= A\,B^2\\
&= A\,B && \text{por 1}
\end{aligned}
$$

(36) Demostrar que si A es idempotente y B es ortogonal, entonces B^TAB es idempotente

Prueba:

Debo probar que $(B^TAB)^2 = B^TAB$

$$\text{Hipótesis}\begin{cases}1.\ A \text{ es idempotente} \iff A^2 = A\\ 2.\ B \text{ es ortogonal} \iff BB^T = I\end{cases}$$

5:
$$
\begin{aligned}
(B^TAB)^2 &= (B^TAB)(B^TAB)\\
&= B^TA(BB^T)AB\\
&= B^TA\,I\,A\,B\\
&= B^TAAB\\
&= B^TA^2B\\
&= B^TAB
\end{aligned}
$$

(37) Demostrar, si $A^2 = A$ y $A + B = I$ entonces $A^2 = B$ y $AB = BA = \theta$

Demostración:

1. De $A + B = I$

$$
\begin{aligned}
A(A+B) &= AI \quad\wedge\quad (A+B)A = IA\\
\underbrace{A^2}+AB &= A \qquad\quad \underbrace{A^2}+BA = A\\
A + AB &= A \qquad\quad A + BA = A\\
AB &= \theta \quad\wedge\quad BA = \theta
\end{aligned}
$$

2. De $A + B = I$

$$
\begin{aligned}
B(A+B) &= BI \quad\wedge\quad (A+B)B = IB\\
\underbrace{BA}+B^2 &= B \qquad\quad \underbrace{AB}+B^2 = B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta + B^2 &= B \qquad\quad \theta + B^2 = B\\
B^2 &= B \quad\wedge\quad B^2 = B
\end{aligned}
$$

(38) Demostrar, si $A + B = I$ y $AB = \theta$, entonces A y B son idempotentes

Demostración:

$$\text{Debo probar que}\begin{cases}A^2 = A\\ B^2 = B\end{cases}$$

Veamos:

De $A + B = I$

$$
\begin{aligned}
A(A+B) &= AI \quad\wedge\quad (A+B)\,B = I\,B\\
A^2 + \underbrace{AB}_{\theta} &= A \qquad\quad \underbrace{AB}_{\theta} + B^2 = B\\
A^2 &= A \qquad\quad B^2 = B
\end{aligned}
$$

(39) Demostrar, si $AB = A$ y $BA = B$, entonces A, B, A^T, B^T; son idempotentes.

Demostración:

$$\text{Se debe probar:}\begin{cases}A^2 = A\\ B^2 = B\\ (A^T)^2 = A^T\\ (B^T)^2 = B^T\end{cases}$$

1. De
$$
\begin{aligned}
A &= AB\\
A^2 &= (AB)\,(AB)\\
&= A\,\underbrace{(BA)}\,B\\
&= A\ \ B\ \ B\\
&= \underbrace{(AB)}\,B\\
&= A\,B\\
&= A
\end{aligned}
$$

2. De
$$
\begin{aligned}
B &= BA\\
B^2 &= (BA)(BA)\\
&= B\,\underbrace{(AB)}\,A\\
&= B\ \ A\ \ A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{(BA)}\,A \\
&= B\;A \\
&= B
\end{aligned}
$$

De $\begin{cases} A = AB \rightarrow A^T = (AB)^T = B^T A^T \\ B = BA \rightarrow B^T = (BA)^T = A^T B^T \end{cases}$

3. $$
\begin{aligned}
(A^T)^2 &= (B^TA^T)(B^TA^T) \\
&= B^T\underbrace{(A^TB^T)}A^T \\
&= B^T(BA)^TA^T \\
&= B^TB^TA^T \quad , \quad BA = B \\
&= B^T(B^TA^T) \quad , \quad \text{pues } B^TA^T = (AB)^T = A^T \\
&= \underbrace{B^T\quad A^T} \\
&= A^T
\end{aligned}
$$

4. $$
\begin{aligned}
(B^T)^2 &= (A^TB^T)(A^TB^T) \\
&= A^T\underbrace{(B^TA^T)}B^T \\
&= A^T\quad A^T\quad B^T \\
&= A^T\underbrace{(A^TB^T)} \\
&= \underbrace{A^T\quad B^T} \\
&= B^T
\end{aligned}
$$

(40) **Demostrar que si A es simétrica, entonces B^TAB es simétrica cualquiera que sea $B_{n\times n}$.**

Demostración: Debo probar: $(B^TAB)^T = B^TAB$

$$
\begin{aligned}
(B^TAB)^T &= (B^T(AB))^T \\
&= (AB)^T(B^T)^T \\
&= (B^TA^T)B \\
&= B^TA^TB \\
&= B^TAB \quad , \quad A \text{ es simétrica} \longleftrightarrow A^T = A
\end{aligned}
$$

(41) Sean A y B matrices cuadradas de orden m, tales que $AB = BA$

a) Demostrar que $A^kB = BA^K$; $\forall\, k \in Z^+$

b) Demostrar que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k \quad , \quad \forall n \geq 2$

Prueba de a) (Por inducción)

1. Si $k = 1 \Rightarrow AB = BA$, que es verdadero por dato.

2. Si $k = n$, suponer que se cumple: $A^nB = BA^n$

3. Para $k = n+1$ debe cumplirse: $A^{n+1}B = BA^{n+1}$.

   Partir de $A^{n+1}B$ y aplicar sucesivamente los pasos 2 y 1.

   Veamos:
$$
\begin{aligned}
A^{n+1}B &= AA^nB \\
&= A(A^nB) \\
&= A(BA^n) && \text{por 2} \\
&= (AB)A^n \\
&= (BA)A^n && \text{por 1} \\
&= B(AA^n) && \text{asociativa} \\
&= BA^{n+1}
\end{aligned}
$$

Prueba de b) (Por inducción)

1. Si $n = 2$

El 1er miembro:
$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\
&= A(A+B) + B(A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&= A^2 + AB + AB + B^2
\end{aligned}
$$

El 2do miembro:
$$
\sum_{k=1}^{2}\binom{2}{k}A^{2-k}B^k = \binom{2}{0}A^2 + \binom{2}{1}AB + \binom{2}{2}B^2 = A^2 + 2AB + B^2
$$

2. Si $n = h$, suponer que se cumpla:

$$
(A+B)^h = \sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}A^{h-k}B^k
$$

$$
= \binom{h}{0}A^h + \binom{h}{1}A^{h-1}B + \binom{h}{2}A^{h-2}B^2 + \ldots\ldots + \binom{h}{h}B^h
$$

3. Para $n = h+1$:

$$(A+B)^{h+1} = (A+B)^h(A+B)$$

$$= \left[\binom{h}{0}A^h + \binom{h}{1}A^{h-1}B + \binom{h}{2}A^{h-2}B^2 + \ldots\ldots + \binom{h}{h}B^h\right](A+B)$$

$$= \binom{h}{0}A^{h+1} + \binom{h}{1}A^hB + \ldots\ldots + \binom{h}{h}B^hA + \binom{h}{0}A^hB + \ldots\ldots + \binom{h}{h}B^{h+1}$$

$$= \binom{h}{0}A^{h+1} + \left[\binom{h}{1} + \binom{h}{0}\right]A^hB + \left[\binom{h}{2} + \binom{h}{1}\right]A^{h-1}B^2 + \ldots\ldots + \binom{h}{h}B^{h+1}$$

$$= \binom{h+1}{0}A^{h+1} + \binom{h+1}{1}A^hB + \binom{h+1}{2}A^{h-1}B^2 + \ldots\ldots + \binom{h+1}{h+1}B^{h+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}A^{h+1-k}B^k$$

(42) Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $A^2 = I$.
Probar que $\rho(A+I) + \rho(I-A) = 2$

Prueba:

1. Según el problema 27, si $A^2 = I$, se ha encontrado que A tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \quad \forall\, a \in I\!R,\ b \in I\!R - \{0\}$$

2. Si $a = b = 1$, tendremos $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

3. Donde:

a) $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← el rango de esta matriz es 1.

$\Rightarrow \rho(A+I) = 1$ ...... se lee "rango de $A+I$"

b) $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← el rango de esta matriz es 1.

$\Rightarrow \rho(I-A) = 1$

4. Luego: $\rho(A+I) + \rho(I-A) = 1 + 1 = 2$

Caso General: Sea A una matriz $n \times n$, tal que $A^2 = I$, probar que $\rho(A+I) + \rho(I-A) = n$

(43) Sea A una matriz 2×2, tal que, $AB = BA$, $\forall\ B_{2\times 2}$. Probar que existe $\lambda \in I\!R$, tal que $A = \lambda I$

Solución:

1. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{bmatrix}$$

2. $$BA = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am+nc & mb+nd \\ pa+qc & pb+qd \end{bmatrix}$$

3. Como $AB = BA$, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1)\quad am+bp = ma+nc \\ (2)\quad an+bq = mb+nd \\ (3)\quad cm+dp = pa+qc \\ (4)\quad cn+dq = pb+qd \end{cases}$$

$a = ?\quad b = ?\quad c = ?\quad d = ?$

Ordenar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (2)\quad na + (q-m)b - nd = 0 \\ (1)\quad pb - nc = 0 \\ (3)\quad pa + (q-m)c - pd = 0 \\ (4)\quad pb - nc = 0 \end{cases}$$

4. Ahora, resolver el sistema por el Método de Gauss-Jordan. El sistema se reduce a tres ecuaciones, porque la ecuación (1) es igual a la ecuación (4).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} n & q-m & 0 & -n & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ p & 0 & q-m & -p & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{Multiplicar por } \tfrac{1}{n} \text{ (fila 1)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ p & 0 & q-m & -p & 0 \end{array}\right] \quad (-p)\cdot F_1 + F_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & -n & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{n}(q-m) & q-m & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{Multiplicar por } \tfrac{1}{p} \text{ (fila 2)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & (q-m)/n & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -n/p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{n}(q-m) & q-m & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -(q-m)/n \cdot F_2 + F_1, \quad \tfrac{p}{n}(q-m)\cdot F_2 + F_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & (q-m)/p & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -m/p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5. Es compatible el sistema y $\exists n$ infinitas soluciones. Hay: $4-2=2$ parámetros $\begin{cases} d = s \\ c = t \end{cases}$

$$\begin{cases} a = -\frac{q-m}{p}t + s \\ b = \frac{m}{p}\,t \\ c = t\,,\ d = s \end{cases} \Rightarrow \text{Si } t=0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = s\,I$$

(44) Sea A una matriz triangular con componentes iguales a 1 en la diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $N = A - I_3$. Demostrar que $N^{3+1} = \theta$. Nótese que $A = I + N$. Demostrar que A es invertible y que:
su inversa es: $(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$

Solución:

1. $N = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Hallemos el producto: $NNNN = N^4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

3. Se cumple: $N^{3+1} = N^4 = \theta$

4. Se cumple que la inversa de $A = I + N$, es:

$$(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Comprobemos por el método de Gauss-Jordan la inversa de A

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
1 & a & b & 1 & 0 & 0 & \leftarrow + \\
0 & \textcircled{1} & c & 0 & 1 & 0 & \text{por } (-a) \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & b-ac & 1 & -a & 0 & \leftarrow + \\
0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & \text{por } (-c) \quad -(b-ac) \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -a & -b+ac & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Caso General: Sea A una matriz triangular con componentes iguales a 1, en la diagonal:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & & 0 \\ 0 & 1 \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{In} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

Sea $N = A - In$. Demostrar que $N^{n+1} = \theta$. Nótese que $A = I + N$. Demostrar que A es invertible y su inversa es $(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^n N^n$.

(45) Sean B y C matrices cuadradas de orden n tales que $C^2 = \theta$ y $BC = CB$; demostrar que, si $A = B + C$ entonces: $A^{k+1} = B^k (B + (k+1)\,C)$; $\forall\, k \geq 1$

<u>Prueba:</u> (Por inducción)

1. Para $k = 1$

El 1er miembro es A^{1+1}
$$\begin{aligned}
&= A \cdot A \\
&= (B+C)(B+C) = B(B+C) + C(B+C) \\
&= B^2 + BC + CB + C^2 \\
&= B^2 + BC + BC + \theta \qquad \text{dato: } CB = BC \\
&= B^2 + 2BC \qquad\qquad\qquad\ \ C^2 = \theta \\
&= B(B+2C)
\end{aligned}$$

El 2do miembro coincide cuando $k = 1$

2. Suponer que para $k = h$, $h > 1$ se cumple: $A^{h+1} = B^h (B + (h+1)\,C)$

3. Para $k = h + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
A^{(h+1)+1} &= A^{h+1} \cdot A \quad \text{, donde } A = B + C \ \text{, si } k = 0 \\
&= [B^h (B + (h+1)C)][B + C] \\
&= [B^h (B + (h+1)C)]B + [B^h (B + (h+1)C)]C \\
&= [B^h (B^2 + (h+1)CB)] + [B^h (BC + (h+1)\underbrace{C^2}_{\theta})] \quad , \ CB = BC \\
&= [B^h (B^2 + (h+1)BC)] + B^h BC \\
&= [B^h \cdot B(B + (h+1)C)] + B^{h+1} C \\
&= [B^{h+1} (B + (h+1)C)] + B^{h+1} C \\
&= B^{h+1} (B + (h+1)C + C) \\
&= B^{h+1} (B + (h+2)C)
\end{aligned}$$

(46) Sabiendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar A^n ; $\forall\, n \geq 2$

<u>Solución:</u>

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^3}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos inducir que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1+2+3+4+\dots+n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(1+n)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(47) Las matrices A y B de $I\!R^{m\times m}$ son tales que A y $(AB - BA)$ son permutables. Demostrar que: $(AB - BA)\,A^n = A^n\,(AB - BA)$ $\forall n \in N$

Prueba: (Por Inducción)

1. $n = 1$: $(AB - BA)\,A = A\,(AB - BA)$ es verdadero según hipótesis.
2. $n = h$: $(AB - BA)\,A^h = A^h\,(AB - BA)$ es verdadero.
3. $n = h + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} (AB - BA)\,A^{h+1} &= (AB - BA)\,A^h A \\ &= A^h (AB - BA)A \quad \text{por } 2 \\ &= A^h\,A(AB - BA) \quad \text{por } 1 \\ &= A^{h+1}(AB - BA) \end{aligned}$$

(48) Probar que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\,\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & p\,\text{sen}\,(n\theta) \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \quad \forall\, n \geq 2\ ,\ n \in Z$$

Prueba: (Por inducción)

1. Si $n = 2$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta & p(\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\,\text{sen}\theta) \\ -\frac{1}{p}(\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta) & -\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & p\,\text{sen}2\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

2. Para $n = h$, suponer que se cumple:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\,\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}2\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^h = \begin{bmatrix} \cos(h\theta) & p\,\text{sen}\,(h\theta) \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,(h\theta) & \cos(h\theta) \end{bmatrix}$$

3. $n = h + 1$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^h \begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h\theta) & p\,\text{sen}(h\theta) \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,(h\theta) & \cos(h\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & p\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h\theta)\cos\theta - \text{sen}\,(h\theta)\text{sen}\theta & p(\cos(h\theta)\text{sen}\theta + \text{sen}\,(h\theta)\cos\theta) \\ -\frac{1}{p}(\text{sen}\,(h\theta)\cos\theta + \cos(h\theta)\text{sen}\theta & -\text{sen}\,(h\theta)\text{sen}\theta + \cos(h\theta)\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(h+1)\theta & p\,\text{sen}\,(h+1)\theta \\ -\frac{1}{p}\text{sen}\,(h+1)\theta & \cos(h+1)\theta \end{bmatrix}$$

(49) Las matrices A y B de $I\!R^{m\times m}$ son tales que A y $(AB - BA)$ son permutables. Demostrar que $A^nB - BA^n = nA^{n-1}(AB - BA)$; $\forall\, n \in I\!N$.

Prueba: (Por inducción)

1. Si $n = 1$, se tiene: $AB - BA = 1\cdot A^o\,(AB - BA)$

$= AB - BA$ que es verdadero, $A^o = I$

2. Si $n = h$, suponer que sea verdadero: $A^hB - BA^h = hA^{h-1}(AB - BA)$

3. Si $n = h + 1$:

$$\begin{aligned} A^{h+1}B - BA^{h+1} &= AA^hB - BA^{h+1} \\ &= AA^hB - ABA^h + ABA^h - BA^{h+1} \quad \text{sumar y restar } ABA^h \\ &= A\,(A^hB - BA^h) + (AB - BA)A^h \\ &= AhA^{h-1}(AB - BA) + A^h(AB - BA) \quad \text{por 2 y 47} \\ &= hA^h\,(AB - BA) + A^h(AB - BA) = (h+1)\,A^h(AB - BA) \end{aligned}$$

26. PROBLEMA ECONÓMICO DE LAS RELACIONES INTERINDUSTRIALES (TABLA DE INSUMO – PRODUCTO)

Consideremos la siguiente tabla de transacciones intersectoriales formada por tres sectores de producción:

COMPRAS (j) / VENTAS (i)	DEMANDA INTERMEDIA SECTOR 1	SECTOR 2	SECTOR 3	DEMANDA FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
SECTOR 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	X_1
SECTOR 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	X_2
SECTOR 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	X_3

¿Cómo se interpreta ésta tabla?

Se interpreta del siguiente modo:

1) El **SECTOR** 1 puede ser : Agropecuario o Industria Petroquímica o **TRANSPORTE**
   El **SECTOR** 2 puede ser : Industrial o Industria Textil o **FINANZAS**
   El **SECTOR** 3 puede ser : Servicios o Industria de construcción o **ENERGÉTICOS**

2) La columna 1 representa las compras que hace el **SECTOR** 1 a los **SECTORES** 1, 2, 3 respectivamente. Es decir:

   x_{11} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 1
   x_{21} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 2
   x_{31} es la cantidad que el sector 1 compra al **SECTOR** 3

   La columna 2 representa las compras que hace el **SECTOR** 2 a los **SECTORES** 1, 2 y 3, respectivamente. Es decir:

   x_{12} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 1
   x_{22} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 2
   x_{32} es la cantidad que el sector 2 compra al **SECTOR** 3

   La columna 3 representa las compras que hace el **SECTOR** 3 a los **SECTORES** 1, 2 y 3, respectivamente. Es decir:

   x_{13} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 1
   x_{23} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 2
   x_{33} es la cantidad que el sector 3 compra al **SECTOR** 3

3) Las tres columnas representan la Demanda Intermedia o la Utilización Intermedia ya que las cifras x_{ij} representan la cantidad de los insumos que los sectores adquieren para fabricar otros productos que todavía no llegan al consumidor final.

4) La cuarta columna $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ representa la cantidad de compras que los consumidores finales efectúan a los **SECTORES** 1, 2 y 3 (Sector de Producción).

   Donde: y_1 Puede ser la cantidad de compra de alimentos, o (maquinaria)
   y_2 Puede ser la cantidad de compra de ropa (o vehículos)
   y_3 Puede ser la cantidad de compra de servicios recreativos (o edificios)

   En general se puede decir compra de bienes de activo fijo.

   La columna $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ recibe el nombre de Demanda Final o de Utilización Final.

5) La última columna $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ representa el Valor Bruto de la Producción de cada sector o simplemente Producción Bruta de cada uno de los sectores. Las cifras X_1, X_2 y X_3 se obtienen sumando horizontalmente la demanda intermedia con la demanda final.

   Es decir: (I) $\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{cases}$

6) Esta suma horizontal tiene sentido porque las cantidades x_{11} , x_{12} , x_{13} , y_1 están expresadas en unidades físicas del mismo tipo, ya que representan las ventas que efectúa el sector 1, a los sectores 1, 2, 3 y a la demanda final y_1.
   Del mismo modo ocurre con las sumas horizontales que se hacen en la 2ª y 3ª filas, respectivamente. Siendo así, sumar verticalmente no tendría sentido, por ejemplo la suma: x_{11} toneladas de cereales + x_{21} metros de tubos de acero + x_{31} horas de trabajo, no se puede sumar. Por ello, es preferible que los insumos no deben ser físicos sino deben de estar expresadas equivalentemente en valores monetarios (dólares) para que de esta manera se pueden sumar horizontalmente (**VENTAS**) y verticalmente (**COMPRAS**).

7) Para un plan de requerimientos de producción, vale decir para una planificación en la economía nacional, se requiere de la tabla de insumo-producto y de algunas operaciones matriciales (inversa de una matriz, producto de dos matrices y suma de matrices).

   Por ejemplo, si una oficina de planificación ha determinado el incremento en la demanda final qué ocurrirá en el próximo año ¿Cuál será el valor de la producción Bruta de cada sector que requeriría para satisfacer esas necesidades?.

8) Para responder a ésta pregunta se construye una segunda tabla que se conoce con el nombre de **MATRIZ DE COEFICIENTES TÉCNICOS o MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO O MATRIZ DE REQUERIMIENTOS DIRECTOS POR UNIDAD DE PRODUCCIÓN BRUTA.**

Para ello relacionamos el sector vendedor (i) y el **SECTOR COMPRADOR** (j) con la producción bruta X_j del sector comprador, por medio de la ecuación:

$$\boxed{\frac{x_{ij}}{X_j} = a_{ij}} \quad \text{donde } a_{ij} \text{ es el coeficiente técnico.}$$

Cada coeficiente a_{ij} representa los requerimientos de insumo del sector i necesario para producir una unidad del producto j.

$$\text{Si } \boxed{\frac{x_{ij}}{X_j} = a_{ij}} \Rightarrow \boxed{x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j} \quad \text{(II)}$$

Si $i = 1 \Rightarrow j = 1, 2, 3$
Si $i = 2 \Rightarrow j = 1, 2, 3$
Si $i = 3 \Rightarrow j = 1, 2, 3$

Las compras que el sector j efectúa al sector i es igual al producto del coeficiente técnico a_{ij} por la producción bruta X_j.

De modo que: (*)

$$\begin{cases} \dfrac{x_{11}}{X_1} = a_{11} & \dfrac{x_{12}}{X_2} = a_{12} & \dfrac{x_{13}}{X_3} = a_{13} \\ \dfrac{x_{21}}{X_1} = a_{21} & \dfrac{x_{22}}{X_2} = a_{22} & \dfrac{x_{23}}{X_3} = a_{23} \\ \dfrac{x_{31}}{X_1} = a_{31} & \dfrac{x_{32}}{X_2} = a_{32} & \dfrac{x_{33}}{X_3} = a_{33} \end{cases}$$

NOTA: Los valores a_{ij} son constantes durante un cierto período de tiempo.

Sustituir (*) en (I):

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + y_2 \\ X_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + y_3 \end{cases}$$

Matricialmente éste sistema lineal se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{o sea} \quad \boxed{X = AX + Y} \quad \text{(III)}$$

De la ecuación (III) se quiere hallar el vector columna X.

Veamos: De (III), obtenemos: $X - AX = Y$

$IX - AX = Y$, puesto que $IX = X$

$(I - A)X = Y$ $\quad I$: matriz identidad

Multiplicar por $(I - A)^{-1}$: $\underbrace{(I - A)^{-1}(I - A)}_{I} X = (I - A)^{-1} Y$

$\Rightarrow IX = (I - A)^{-1} Y$

$\Rightarrow \boxed{X = (I - A)^{-1} Y}$

$(I - A)$: se llama MATRIZ DE LEONTIEF

$(I - A)^{-1}$: es la MATRIZ INVERSA DE LEONTIEF

En ésta ecuación se tiene que X depende de los valores de Y siendo $(I - A)^{-1}$ constante o lo que es equivalente afirmar que A es constante.

En términos de función tendríamos: $\boxed{X = f(Y)}$

donde $\Delta X = f(Y + \Delta Y) - f(Y)$

$\Delta X = X^{(1)} - X^{(0)}$

Donde: $\begin{cases} X^{(0)} = (I - A)^{-1} Y^{(0)} \\ X^{(1)} = (I - A)^{-1} Y^{(1)} \end{cases}$

$X^{(0)}$: **es el valor de la matriz para el año que estamos considerando.**

$X^{(1)}$: **el valor de la matriz para el próximo año (o período) que se está planificando cuando se incrementa Y.**

ΔX : **es el incremento que sufre la Producción Bruta.**

PROBLEMA 1 **Sea la siguiente tabla de transacciones intersectoriales. Determine los incrementos de producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 20% en la demanda final del sector agrícola, del 30% en el sector industrial y del 10% en el sector servicios.**

COMPRAS / VENTAS	DEMANDA INTERMEDIA			DEMANDA FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
	A	I	S		
A	600	400	1400	600	3,000
I	1500	800	700	1000	4,000
S	900	2,800	700	2,600	7,000

Solución:

PASO 1 **Determinar los coeficientes técnicos:**

$a_{11} = \frac{600}{3000} = 0.2$ $\quad a_{12} = \frac{400}{4000} = 0.1$ $\quad a_{13} = \frac{1,400}{7000} = 0.2$

$a_{21} = \frac{1500}{3000} = 0.3$ $\quad a_{22} = \frac{800}{4000} = 0.2$ $\quad a_{23} = \frac{700}{7000} = 0.1$

$a_{31} = \frac{900}{3000} = 0.3$ $\quad a_{32} = \frac{2800}{4000} = 0.7$ $\quad a_{33} = \frac{700}{7000} = 0.1$

PASO 2 La matriz de los coeficientes técnicos es: $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$

PASO 3 Hallar el valor de la matriz $X^{(1)}$, usando la relación:

$$X^{(1)} = (I-A)^{-1}\,Y^{(1)}\ ,\ \text{donde}\quad Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 600+0.20(600) \\ 1000+0.30(1000) \\ 2600+0.10(2600) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix}$$

INCREMENTO que ha sufrido la matriz Y en un 20%, 30% y 10%, respectivamente, en cada SECTOR.

Veamos:

a) $$I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$I-A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.2 \\ -0.5 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$$

b) Ahora, hallemos la inversa de la matriz $I-A$ o sea $(I-A)^{-1}$. Esta vez conviene usar el método de la Adjunta, para hallar dicha inversa.

$$(I-A)^{-1} = \frac{Adj\,(I-A)}{det\,(I-A)}\ ,\ \text{donde}\ \ Adj\,(I-A) = (Cof\,(I-A))^T$$

Donde:

c) $$Cof(I-A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0.5 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0.5 & 0.8 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 0.8 & -0.1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.5 & -0.1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.5 & 0.8 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cof(I-A) = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.48 & 0.59 \\ 0.23 & 0.66 & 0.59 \\ 0.17 & 0.18 & 0.59 \end{bmatrix}$$

d) Pero: $$Adj(I-A) = (cof(I-A))^T = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.23 & 0.17 \\ 0.48 & 0.66 & 0.18 \\ 0.59 & 0.59 & 0.59 \end{bmatrix}$$

e) Calculo del determinante de $(I-A)$:

$$\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.2 \\ -0.5 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.8\begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.7 & 0.9 \end{vmatrix} - (-0.1)\begin{vmatrix} -0.5 & -0.1 \\ -0.3 & 0.9 \end{vmatrix} + (-0.2)\begin{vmatrix} -0.5 & 0.8 \\ -0.3 & -0.7 \end{vmatrix}$$

$$= 0.8\,(0.65) + (0.1)\,(-0.48) - (0.2)(0.59)$$

$$= 0.520 + 0.048 - 0.118$$

$$det\,(I-A) = 0.354$$

f) En consecuencia:

$$(I-A)^{-1} = \frac{Adj(I-A)}{\det(I-A)} = \frac{\begin{bmatrix} 0.65 & 0.23 & 0.17 \\ 0.48 & 0.66 & 0.18 \\ 0.59 & 0.59 & 0.59 \end{bmatrix}}{0.354} = \begin{bmatrix} 1.836 & 0.650 & 0.480 \\ 1.355 & 1.864 & 0.508 \\ 1.666 & 1.666 & 1.666 \end{bmatrix}$$

ésta matriz es constante hasta cierto período de tiempo. La variable es la matriz Y, de modo que cada vez que varia Y varia X, puesto que X es función de Y o sea $X = f(Y)$.

PASO 4 De la ecuación $X^{(1)} = (I-A)^{-1}\,Y^{(1)}$, ahora tenemos que:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.836 & 0.650 & 0.480 \\ 1.355 & 1.864 & 0.508 \\ 1.666 & 1.666 & 1.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1322 + 845 + 1372 \\ 975 + 2423 + 1452 \\ 1199 + 2165 + 4764 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3539 \\ 4850 \\ 8128 \end{bmatrix}$$

Lo que significa que para satisfacer la demanda final de 720 unidades de productos agropecuarios, 1,300 de productos industriales y 2,860 de servicios, se debe generar una producción bruta de 3539 unidades en el sector agricultura, 4850 unidades en el sector industrial y 8128 unidades en el sector servicios.

PASO 5 Los incrementos de la producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 20% en la demanda final del sector agricultura, del 30% en el sector industrial y del 10% en el sector servicios, se halla por la diferencia :

$$\Delta X = X^{(1)} - X^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3539 \\ 4850 \\ 8128 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 539 \\ 850 \\ 1128 \end{bmatrix}$$

Esto significa que para satisfacer los incrementos previstos de demanda final sectorial de :

$$\Delta Y = Y^{(1)} - X^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 720 \\ 1300 \\ 2860 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 300 \\ 260 \end{bmatrix}$$

Se deben generar en el sistema de producción los siguientes incrementos de producción bruta:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 539 \\ 850 \\ 1128 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 2 *(tabla de insumo producto)*

Dado la matriz de insumo-producto, determine los incrementos de producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 25% del producto final del sector agrícola, del 10% en el sector industrial y del 20% en el sector servicios.

SECTORES	A	I	S	PRODUCTO FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
A	0.2	0.2	0.0	80	200
I	0.2	0.1	0.1	300	400
S	0.0	0.2	0.1	100	200
TRABAJO	0.6	0.5	0.8	20	500
PRODUCCIÓN BRUTA	200	400	200	500	1300

Solución:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 36 \\ 45 \\ 32 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 3 Se han obtenido los siguientes datos respecto de la operación global de una economía nacional a nivel de sus tres sectores fundamentales, que se resumen en este cuadro de transacciones intersectoriales:

SECTORES	A	I	S	PRODUCTO FINAL	PRODUCCIÓN BRUTA
A	80	160	0	160	400
I	40	40	20	300	400
S	0	40	10	50	100

Se pide que construya la matriz de insumo producto, la matriz de Leonief y su inversa. Con estos elementos y suponiendo que se desea incrementar en un 15% el producto del sector industrial y un 12% el del sector de Servicios ¿Cuál será el incremento requerido en la producción bruta del sector agrícola?

PROBLEMA 4 Supongamos que existen sólo tres industrias en la economía y que la matriz de insumo producto es:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Si las demandas finales son $y_1 = 40$, $y_2 = 20$, $y_3 = 50$ (dado en millones de dólares). ¿Cuáles serán los niveles de producción solución para las tres industrias?

PROBLEMA 5 En una economía con dos industrias sabemos que la industria I utiliza 0,20 dólares de su propio producto y 0,50 dólares del bien II para producir un dólar del bien I; la industria II no utiliza nada de su propio producto pero usa 0,60 dólares del bien I en producir un dólar del bien II ; y el sector abierto demanda 3000 billones de dólares del bien I y 5000 billones de dólares del bien II.

a) Escribir la matriz de input, la matriz tecnológica y la matriz de input-output especifica para esta economía.

b) hallar los niveles de producción de la solución por la regla de Cramer.

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}50 & 0 \end{bmatrix}$, la matriz tecnológica es $T = I - A$.

b) Resolviendo la ecuación matricial se hallan X_1 y X_2 que son los niveles de producción.

$$\begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}60 \\ -0.50 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 6 La oficina de admisión de la Universidad San Marcos planea admitir 10 000 estudiantes el año próximo. El vector A establece la inscripción de nuevos estudiantes en las categorías de local (L) y foráneos (F).

La matriz C indica los porcentajes de estudiantes que se espera elijan estudios especializados en las escuelas profesionales: A, B, C y D, dentro de la Universidad.

$$A = \begin{matrix} L & F \\ (7500 & 2500) \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.40 & 0.10 \\ 0.40 & 0.30 & 0.25 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ F \end{matrix}$$

(columnas de C: A, B, C, D — **COLEGIOS**)

Efectúese una multiplicación matricial con la que se calcule el número de estudiantes que se espera entren a cada escuela profesional el año próximo.

PROBLEMA 7 Refiérase al ejercicio 6. La oficina de Admisión de U.N.M.S.M. estima que los estudiantes seleccionaran las alternativas de alojamiento de acuerdo con los porcentajes en H:

	Dormitorio de la Univ.	Pensión Estudiantil	Alojamiento Particular
L	0.40	0.30	0.30
F	0.60	0.20	0.20

$$H = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.30 & 0.30 \\ 0.60 & 0.20 & 0.20 \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ F \end{matrix}$$

Efectúese una multiplicación matricial para calcular el número de nuevos estudiantes que se espera elijan las diferentes opciones de alojamiento.

PROBLEMA 8 La compañía **LOZA S.A.** elabora tres productos, cada uno de los cuales requiere de determinada cantidad de materia prima y mano de obra. En la matriz R se resumen las necesidades por unidad de cada producto.

RENGLÓN DE MATERIA PRIMA — MANO DE OBRA

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Producto } A \\ \text{Producto } B \\ \text{Producto } C \end{matrix}$$

Las necesidades de materia prima se establecen en libras por unidad y las necesidades en mano de obra, en horas por unidad. Los costos de las tres especies de materia prima son 2, 3 y 1.50 dólares por libra, respectivamente. Los costos por mano de obra son de 5 dólares por hora. Supóngase que se van a producir 500, 1000 y 400 unidades de los productos A, B y C.

a) Efectúese una multiplicación matricial con la que se calculen las cantidades totales de los cuatro recursos que se requieren para elaborar los productos A, B y C.

b) Empleando la respuesta de la parte a) efectúese una multiplicación matricial con la que se calcule el costo total combinado de producción.

PROBLEMA 9 (Administración de hospitales) El hospital Loayza ha hecho acopio de datos observando a los pacientes que se internan. El vector P indica el porcentaje de todos los pacientes que se internan en diferentes unidades hospitalarias. El vector S indica la cantidad promedio de pacientes que permanecen (en días) en cada unidad hospitalaria.

$$P = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.10 \\ 0.24 \\ 0.48 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{OBSTÉTRICA} \\ \text{CARDIACA} \\ \text{PEDIÁTRICA} \\ \text{OTRAS} \end{matrix} \qquad S = (4 \quad 14 \quad 3 \quad 5)$$

El vector C resume el costo corriente diario por paciente en las diferentes unidades:

$$C = (\$\,280 \quad \$\,400 \quad \$240 \quad \$260)$$

Si se admiten 200 nuevos pacientes, efectúese una multiplicación matricial para calcular:

a) El número de pacientes admitidos en cada unidad hospitalaria
b) El número total esperado de pacientes – días.
c) El costo total por día de los 200 pacientes

OTROS PROBLEMAS:

① Dadas las matrices $A = (a_{ij}) = (|i-j|)_{20\times 3}$ y $B = (b_{ij}) = (i+j)_{3\times 3}$, encontrar los elementos C_{69} y C_{96} de la matriz $ABA^T = (C_{ij})$

Respuestas: $C_{69} = 942$; $C_{96} = 942$

② Mostrar que si $adj(A)$ es no singular, entonces A también es no singular.

③ Probar que $adj(ABC) = adj(A)\, adj(B)\, adj(C)$ y que $A\, adj(B) = adj(B)\, A$, si ABC es no singular y A, B, C conmutan dos a dos.

④ Determinar, justificando, el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & -2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 17 \\ -15 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 19 & -11 \\ \sqrt{3} & 0 & -19 & 0 & 7 \\ -17 & 13 & 11 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta: Rango = 4

⑤ Conociendo que los números 945193; 525217; 754585; 292201; 356269 son divisibles por 19, mostrar que el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 & 5 & 4 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 3 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$ también es divisible por 19.

⑥ Determinar el valor de:

$$\begin{vmatrix} a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & a_{23}+a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

Sabiendo que; $|[a_{ij}]| = 10$ ***Respuesta:*** 20

⑦ Encontrar la inversa de la siguiente matriz para los casos en que existe. En aquellas en que no exista, hallar su rango.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Respuesta: a) Si $x \neq \pm\sqrt{2}$, $\exists A^{-1}$ y $\rho(A) = 4$

b) Si $x = \pm\sqrt{3}$, $\exists A^{-1}$ y $\rho(A) = 2$

CAPÍTULO 2

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1. DEFINICIÓN

Un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas, es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$ es la matriz de coeficientes.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$ es la matriz de las n-incognitas.

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$ es la matriz de los términos independientes.

$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ Es la matriz ampliada (o aumentada) del sistema (*)

En la forma matricial, el sistema (*) se escribe: $AX = B$

2. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS

Dado la ecuación matricial $AX = B$, se tiene:

a) Si $B = \theta_{m\times 1}$ entonces diremos que el sistema es homogénea.
b) Si $B \neq \theta_{m\times 1}$ entonces diremos que el sistema es NO homogénea
$\theta_{m\times 1}$ es la matriz nula $m \times 1$.

3. METODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1 REGLA DE CRAMER

Si $AX = B$ es un sistema de n-ecuaciones con n-incognitas: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ en el cual $|A| \neq 0$, entonces existe una solución única X, dada por las formulas:

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} \quad , \quad \text{para } j = 1,2,3, \ldots\ldots, n$$

Prueba:

1) Si $|A| \neq 0$, entonces $AX = B$ implica $X = A^{-1}B$

2) Pero $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$, donde $Adj(A) = [\alpha_{ij}]^T$

$= \frac{1}{|A|}(cofA)^T \qquad [\alpha_{ij}] = cof\ A$ └ matriz de cofactores de A

3) Reemplazar (2) en (1): $X = \frac{1}{|A|}(cof\ A)^T B$

$$\alpha_{kj} = cof\ a_{kj} = (-1)^{k+j}\,|A(k/j)|$$

└ el cofactor correspondiente al elemento a_{kj}, es el determinante de la submatriz $A(k/j)$ que resulta de anular la fila k y la columna j, con signo $(-1)^{k+j}$

4) Cada componente de X, será:

$$X_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} \quad , j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boxed{X_j = \frac{\det C_j}{\det A}}$$

donde:

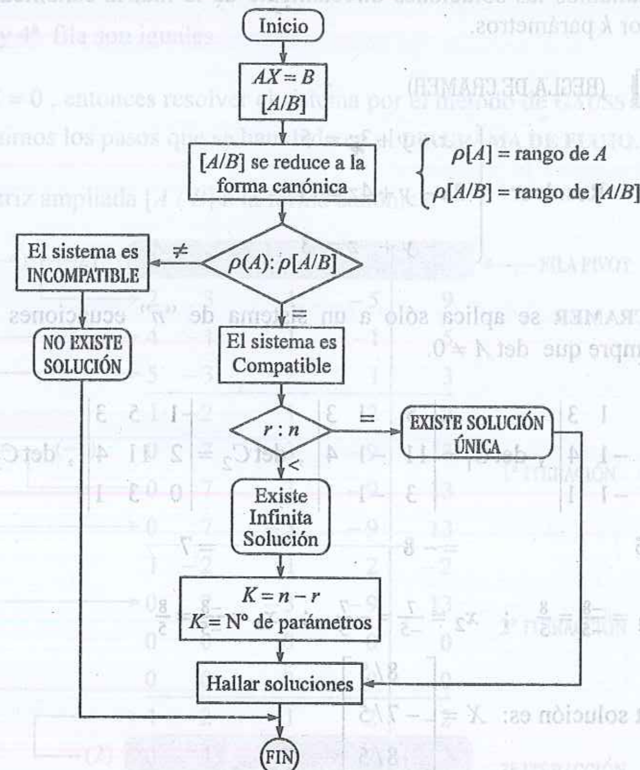
$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot cof\ a_{kj} = \det(C_j)$, C_j = matriz obtenida de A al reemplazar la columna j de A por la matriz columna B.

2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (Por operaciones elementales sobre las filas de una matriz)

Este método consiste en lo siguiente:

1ª) Reducir la matriz ampliada $[A/B]$ en matriz canónica.

2ª) Discutir el sistema, en base a la reducción canónica de $[A/B]$.
Para discutir el sistema, tomar como referencia, el siguiente diagrama de flujo.



Según el diagrama:

1ª) Reducir la matriz ampliada $[A/B]$ a la forma canónica.

2ª) De la forma canónica hallamos el rango de A y el rango de la matriz ampliada $[A/B]$.

3ª) A continuación, comparamos el rango de A con el rango de la matriz ampliada $[A/B]$.

a) Si el rango de A es diferente al rango de $[A/B]$, entonces el sistema es incompatible y por tanto, no existe solución.

b) Si $\rho[A] = \rho[A/B] = r$, entonces el sistema es **COMPATIBLE**.

A continuación comparar "r" con "n": (r es el rango y n es el número de incógnitas).

i) Si $r = n$, entonces existe solución única y hallamos la solución directamente de la matriz canónica.

ii) Si $r < n$, entonces existe infinita solución.
En este caso, hallar $k = n - r$, que es el número de parámetros que tendrá el sistema. Después, hallamos las soluciones directamente de la matriz canónica, reemplazando k variables por k parámetros.

EJEMPLO 1 (REGLA DE CRAMER)

$$\text{Resolver}\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 11 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

La regla de **CRAMER** se aplica sólo a un sistema de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas, siempre que $\det A \neq 0$.

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $\det C_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 11 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$, $\det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$, $\det C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8$

2) Luego: $x_1 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$; $x_2 = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$; $x_3 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

El **VECTOR** solución es: $X = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -7/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 2 (MÉTODO GAUSS-JORDAN) Se aplica para todo sistema de ecuaciones lineales.

$$\text{Resolver}\begin{cases} x - 2y + z + 2u = -2 \\ 2x + 3y - z - 5u = 9 \\ 4x - y + z - u = 5 \\ 5x - 3y + 2z + u = 3 \end{cases}$$

Solución:

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-4) & (-5) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \\ 0 & 7 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$,

pues la 2ª , 3ª y 4ª fila son iguales.

2) Como el $\det A = 0$, entonces resolver el sistema por el método de **GAUSS JORDÁN**.
Para ello, seguimos los pasos que se han dado en el **DIAGRAMA DE FLUJO**.

1º) Reducir la matriz ampliada $[A / B]$ a la forma canónica.

$$\begin{array}{r|rrrr|r|l}
 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & \leftarrow \text{FILA PIVOT} \\
(-2) & 2 & 3 & -1 & -5 & 9 & \\
(-4) & 4 & -1 & 1 & -1 & 5 & \\
(-5) & 5 & -3 & 2 & 1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & \\
(-1) & 0 & 7 & -3 & -9 & 13 & \text{1ª ITERACIÓN} \\
 & 0 & 7 & -3 & -9 & 13 & \\
 & 0 & 7 & -3 & -9 & 13 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & \\
\text{por } \frac{1}{7} & 0 & 7 & -3 & -9 & 13 & \text{2ª ITERACCIÓN} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & \\
(2) & 0 & 1 & -3/7 & -9/7 & 13/7 & \text{3ª ITERACCIÓN} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1/7 & -4/7 & 12/7 & \\
 & 0 & 1 & -3/7 & -9/7 & 13/7 & \text{4ª ITERACCIÓN} \\
(*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{MATRIZ CANÓNICA} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\end{array}$$

A

$[A/B]$

2º) Discutir la matriz canónica obtenida en (*)

> ρ : es la letra griega RHO
> $\rho\,[A]$ = rango de A
> $\rho\,[A/\,B]$ = rango de $[A/B]$

a) $\rho\,[A] = 2$, porque tiene 2 filas no nulas

b) $\rho\,[A\,/\,B] = 2$, porque tiene 2 filas NO nulas.

c) Como $\rho\,[A] = \rho\,[A\,/\,B] = 2$, afirmamos que el sistema es compatible (consistente).

d) Ahora, comparar el rango $r = 2$ con el número de incógnitas $n = 4$

$$r < n$$
$$2 < 4$$

e) Como el rango es menor que el Nº de incógnitas, entonces existe infinita solución.

f) Hallar el número de parámetros $k = n - r$

$$k = 4 - 2 = 2$$

Habrán dos parámetros. Llamemos "t" y "s" a dichos parámetros.

Las soluciones son expresadas en términos de los parámetros.

En (*) hacemos $\begin{cases} z = t \\ u = s \end{cases}$ y obtenemos:

$$x + 0y + \tfrac{1}{7}t - \tfrac{4}{7}s = \tfrac{12}{7} \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{7}t + \tfrac{4}{7}s + \tfrac{12}{7}$$

$$y - \tfrac{3}{7}t - \tfrac{9}{7}s = \tfrac{13}{7} \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{3}{7}t + \tfrac{9}{7}s + \tfrac{13}{7}$$

g) El conjunto solución será:

$$\begin{cases} x = -\tfrac{1}{7}t + \tfrac{4}{7}s + \tfrac{12}{7} \\ y = \tfrac{3}{7}t + \tfrac{9}{7}s + \tfrac{13}{7} \\ z = t \\ u = s \end{cases} \quad , \ t \in I\!R \ , \ s \in I\!R$$

En forma de VECTOR es:

$$X = \left(-\tfrac{1}{7}t + \tfrac{4}{7}s + \tfrac{12}{7} , \tfrac{3}{7}t + \tfrac{9}{7}s + \tfrac{13}{7} , t , s\right)$$

$$X = \tfrac{1}{7}(-t + 4s + 12 , 3t + 9s + 13 , 7t , 7s)$$

$$X = \tfrac{1}{7}\ [t(-1 , 3 , 7 , 0) + s(4 , 9 , 0 , 7) + (12 , 13 , 0 , 0)]$$

EJEMPLO 3 Determinar para qué valores de k el siguiente sistema tiene soluciones distintas de la trivial

$$(\alpha)\begin{cases} x + (k+1)y + z = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

En cada caso, estudiar el espacio solución e interpretar geométricamente.

En primer lugar, reducir la matriz ampliada $[A/B]$ en matriz canónica.

Operación					
$-(k+1)$, (-1)	(1)	$k+1$	1	0	
→	1	1	$k+1$	0	(α)
→	$k+1$	1	1	0	
	1	$k+1$	1	0	
por $-\frac{1}{k}$, $k \neq 0$ →	0	$-k$	k	0	(I)
	0	$-k(k+2)$	$-k$	0	
→	1	$k+1$	1	0	
$-(k+1)$, $-k(k+2)$	0	(1)	-1	0	
→	0	$-k(k+2)$	$-k$	0	(II)
	1	0	$k+2$	0	
por $-\frac{1}{k(k+3)}$	0	1	-1	0	(III)
$k \neq 0$, $k \neq -3$ →	0	0	$-k(k+3)$	0	
→	1	0	$k+2$	0	
→	0	1	-1	0	(IV)
$-(k+2)$, (1)	0	0	(1)	0	
	1	0	0	0	
	0	1	0	0	
	0	0	1	0	

Como hay un parámetro, hacemos: $x = t$

y por lo tanto el vector solución es:

$$X = (t\,,\,t\,,\,t) = t\,(1,1,1)$$

El espacio solución es: $W = \mathfrak{L}\{(1\,,1\,,1)\}$

Ahora analicemos:

1) En la Iteración (I): Si $k = 0$, el sistema (α) se reduce a una sola ecuación:

$x + y + z = 0$ que viene a ser un plano que pasa por el origen. En consecuencia, en el sistema (α) se cumple:

$\rho\,(A) = \rho\,(A\,/\,B) = 1$
$n = 3$ ←— nº de incógnitas
$k = 3 - 1$
$= 2$ ←— nº de parámetros

Como hay 2 parámetros,

hacemos: $\begin{cases} x = s \\ y = t \end{cases}$

De: $x + y + z = 0$, obtenemos:

$s + t + z = 0$
$z = -s - t$

Por tanto el vector solución es:

$X = (s, t, -s-t)$; $\forall\ s \in I\!R$, $\forall\ t \in I\!R$

$= s\,(1,0,-1) + t\,(0,1,-1)$

El espacio solución es:

$S = \mathfrak{L}\{(1,0,-1)\ ,(0,1,-1)\}$

2) **En la iteración III:**

Si $k = -3$, el sistema (α) se reduce a dos ecuaciones: $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

o sea $x = y = z$ que viene a ser la ecuación canónica de una recta en $I\!R^3$.

En consecuencia, en el sistema (α) se cumple: $\rho(A) = \rho(A/B) = 2$

$n = 3$
$k = 3 - 2$
$= 1$

Es el Nro. de parámetros

3) Si $k \neq 0 \wedge k \neq -3$, llegaríamos hasta la iteración V, lo cual nos dice que la solución del sistema es la **TRIVIAL**, es decir: $x = y = z = 0$.

> *Nota:* Otra forma de resolver este problema, es aplicando la **PROPOSICIÓN**: "Un sistema de "n" ecuaciones lineales homogéneas con "n" incógnitas, tiene solución **NO TRIVIAL** si, y sólo si $\det A \neq 0$", donde A es la matriz de los coeficientes.

Así, tendremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(fila 1 por } (-1) \text{ a la fila 2; por } -(k+1) \text{ a la fila 3)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & -k & k \\ 0 & -k(k+2) & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -k & k \\ -k(k+2) & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$k^2 + k^2(k+2) = 0$$
$$k^2[1+k+2] = 0$$
$$k^2(k+3) = 0$$
$$k = 0 \ \vee \ k = -3$$

Analizando el sistema (α) obtenemos:

1) Si $k = 0$, el sistema (α) se convierte en: $(\alpha)\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Las tres ecuaciones se han reducido en una sola, que es: $x+y+z=0$

Haciendo $x = t$, $y = t$, obtenemos: $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -s-t \end{cases} \quad \begin{matrix} s \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$

2) Si $k = -3$, el sistema (α) se reduce en:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$$

Que al resolver por el método de Gauss – Jordán, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(fila 1 por } -1 \text{ a la fila 2; por } 2 \text{ a la fila 3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \text{(I)} \quad (+)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(II)} \quad \text{por } \tfrac{1}{3} \text{ (fila 2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(III)} \quad \text{(fila 2 por } 2 \text{ a la fila 1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(IV)}$$

De la iteración IV, obtenemos:
$\rho(A) = \rho(A/B) = 2$.. Como $n = 3$,
entonces el número de parámetros $= 3 - 2 = 1$

La solución se obtiene de IV:

En $\begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ si $z = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3) Si $k \neq 0 \wedge k \neq -3$, el sistema es compatible, puesto que $\rho(A) = \rho(A/B) = 3$. Como el rango es igual a 3 y existen 3 incógnitas, entonces existe única solución. Porque el sistema es homogéneo, la solución es la trivial, esto es:

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0.$$

EJEMPLO 4 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{cases}$$

Respuesta:

Det $A = a(b-1)(b+1)$

Si $a = 0$; $b = 5$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$, $x \cdot$ es cualquier número real.

Si $a = 0$; $b \neq 1$ y $b \neq 5$, el sistema es incompatible.

Si $b = 1$; $z = 0$; $y = 1 - ax$, $x \in \mathbb{R}$.

Si $b = -1$; el sistema es incompatible.

EJEMPLO 5 Resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

Escribimos, directamente, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada; para reducirla a la forma canónica.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right] \quad \text{(fila 1 por } (-3) \text{ a la fila 2; por } (-1) \text{ a la fila 3)}$$

$$\text{(I)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Permutar la fila 2 con la fila 3.

(II)	1	1	−1	1	0	
	0	(1)	−1	−2	−1	(−1) (4)
	0	−4	5	0	7	
	0	0	3	1	9	
(III)	1	0	0	3	1	
	0	1	−1	−2	−1	
	0	0	(1)	−8	3	(1) (−3)
	0	0	3	1	9	
(IV)	1	0	0	3	1	
	0	1	0	−10	2	
	0	0	1	−8	3	
	0	0	0	25	0	← por $\frac{1}{25}$
(V)	1	0	0	3	1	
	0	1	0	−10	2	
	0	0	1	−8	3	
	0	0	0	(1)	0	(8) (10) (−3)
(VI)	1	0	0	0	1	
	0	1	0	0	2	
	0	0	1	0	3	
	0	0	0	1	0	

La iteracción VI es la forma canónica de la matriz ampliada $[A:B]$

Tenemos:

i) $\rho(A) = 4$, $\rho[A:B] = 4$

ii) **Como $\rho(A) = \rho(A:B) \Rightarrow$ el sistema es compatible.**

iii) **Si el rango $r = 4$ y el número de incógnitas $n = 4$, son iguales, entonces existe única solución.**

iv) **La solución se obtiene de la iteración VI:** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

También se puede decir que el vector solución del sistema es: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 6 Aplicando el proceso de Gauss – Jordan a cada uno de los sistemas siguientes, determinar la solución general, si existe:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -16 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Solución:

(1)	−2	1	−1	−1	−6	
2	1	−1	0	−1	−4	$-2F_1+F_2$
4	−3	1	2	−3	−16	$-4F_1+F_3$
3	−6	3	−3	−3	−18	$-3F_1+F_4$
1	−2	1	−1	−1	−6	
0	5	−3	2	1	8	← $\frac{1}{5}F_2$
0	5	−3	2	1	8	
0	0	0	0	0	0	
1	−2	1	−1	−1	−6	← $2F_2+F_1$
0	(1)	−3/5	2/5	1/5	8/5	
0	5	−3	2	1	8	$-5F_2+F_3$
0	0	0	0	0	0	
1	0	−1/5	−1/5	−3/5	−14/5	
0	1	−3/5	2/5	1/5	8/5	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	

a) rango $[A] = 2$

b) rango $[AB] = 2$

c) Es compatible porque Rango $[A]$ = Rango $[AB]$

d) $2 < 5 \Rightarrow 5 - 2 = 3$ ← número de parámetros
(2: rango; 5: número de incógnitas)

De la última iteracción obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{5} + \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b + \frac{3}{5}c \\ x_2 = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}a - \frac{2}{5}b - \frac{1}{5}c \\ x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases}$$

Solución:

6	−3	−4	0	$-6F_4+F_1$
6	−9	4	0	$-6F_4+F_2$
0	3	−4	0	
(1)	1	1	1	
0	−9	−10	−6	
0	−15	−2	−6	
0	3	−4	0	← $\frac{1}{3}F_3$
1	1	1	1	
0	−9	−10	−6	$9F_3+F_1$
0	−15	−2	−6	$15F_3+F_2$
0	(1)	−4/3	0	
1	1	1	1	
0	0	−22	−6	
0	0	−22	−6	← $\frac{1}{-22}F_2$
0	0	−4/3	0	
1	0	7/3	1	
0	0	−22	−6	$22F_2+F_1$
0	0	(1)	3/11	
0	1	−4/3	0	$\frac{4}{3}F_2+F_3$
1	0	7/3	1	$-\frac{7}{3}F_2+F_4$
0	0	0	0	
0	0	1	3/11	
0	1	0	4/11	
1	0	0	4/11	

A continuación, analizamos:

a) Rango (A) = Rango $[AB] = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible.

b) Nº de INCÓGNITAS = RANGO, entonces la solución es única.

c) El conjunto solución es: $\begin{cases} x_1 = 4/11 \\ x_2 = 4/11 \\ x_3 = 3/11 \end{cases}$

EJEMPLO 7 Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ -2F_1 + F_4 \\ -5F_1 + F_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{por } -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2F_3 + F_1 \\ 4F_3 + F_2 \\ \\ 2F_3 + F_4 \\ 5F_3 + F_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2F_4 + F_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ F_2 \longleftrightarrow F_3 \\ F_4 \longleftrightarrow F_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftarrow \text{es la matriz canónica}$$

Ahora, analicemos la matriz canónica:

a) $\rho(A) = 3$,

b) $\rho(A{:}B) = 3$

c) Es compatible el sistema, porque $\rho(A) = \rho(A{:}B)$

d) $4 - 3 = 1$, esto indica que una variable será sustituida por un parámetro.

Hagamos $x_4 = a$.

$$x_1 - \tfrac{5}{6}a = \tfrac{1}{6} \Rightarrow x_1 = \tfrac{5}{6}a + \tfrac{1}{6}$$

$$x_2 + \tfrac{7}{6}a = \tfrac{1}{6} \Rightarrow x_2 = -\tfrac{7}{6}a + \tfrac{1}{6}$$

$$x_3 - \tfrac{5}{6}a = \tfrac{1}{6} \Rightarrow x_3 = \tfrac{5}{6}a + \tfrac{1}{6}$$

$$x_4 = a$$

OTROS EJEMPLOS DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

08 Discutir y analizar, según los valores de k, el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + (k+1)y + z = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Cuando el Nº de INCOG = Nº de ecuaciones, conviene discutir el determinante de la matriz de los coeficientes.

1. $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{matrix} = [1 + 1 + (k+1)^3] - [k+1+k+1+k+1] = k^2(k+3)$$

2. Analizar el sistema de ecuaciones según los valores del determinante:

a) Si $\det A = k^2(k+3) \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq -3$, entonces: $\rho[A] = 3 = \rho[A/B]$ y por tanto el sistema es compatible. Además: Nº de INCOG = rango = 3, entonces tiene única solución. Como el sistema es homogéneo, la solución es trivial, es decir $x = y = z = 0$.

b) Si $\det A = k^2(k+3) = 0 \Longleftrightarrow k = 0 \vee k = -3$ analizamos para cada caso:

b₁) Si $k = 0 \Rightarrow$ el sistema es $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Se ha reducido a una sola ecuación con 3 incógnitas: $x + y + z = 0$, donde:

$A = [1\,1\,1]$, $[A/B] = [1\,1\,1\,0]$

Así, deducimos: $\rho[A] = \rho[A/B] = 1$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible.

Como $1 < 3 \Rightarrow$ habrán $3 - 1 = 2$ parámetros e infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

b₂) Si $k = -3 \Rightarrow$ el sistema es: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

Reducir la matriz ampliada a la forma canónica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow -f_1 + f_2 \\ \leftarrow 2f_1 + f_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{por } \tfrac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 2f_2 + f_1 \\ \\ \leftarrow 3f_2 + f_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

MATRIZ CANÓNICA

Analizando la matriz canónica:

i) $\rho[A] = \rho[A/B] = 2$
$\Rightarrow$ el sistema es compatible.

ii) $2 < 3 \Rightarrow$ existe infinita solución.

iii) $3 - 2 = 1 \Rightarrow$ habrá un parámetro.

Haciendo $z = t$, $\begin{cases} x - t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$ el conjunto solución será: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

09 Resolver: $\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b - 1 \end{cases}$

Solución:

1. $$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -f_1 + f_2 \\ \leftarrow -f_1 + f_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{vmatrix} = a(b-1)(b+1)$$

2. Analizando el valor del determinante:

a) Si $detA = a(b-1)(b+1) \neq O$
$\iff \quad a \neq 0 \wedge b \neq 1 \wedge b \neq -1$
entonces el sistema tiene solución única:

$$x = \frac{5-b}{a(b+1)} \quad , \quad y = \frac{-2}{b+1} \quad , \quad z = \frac{2(b-1)}{b+1}$$

b) Si $det\,A = a(b-1)(b+1) = O$
$\iff \quad a = 0 \vee b = 1 \vee b = -1$
Ahora, hagamos el siguiente análisis:

b$_1$) Si $a = 0 \wedge b = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$

(anula el numerador de x en a))

La matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{cc|l} 5 & 2 & 1 \leftarrow \text{por } \frac{1}{5} \\ 9 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2/5 & 1/5 \\ 9 & 3 & 1 \leftarrow -9f_1 + f_2 \\ 5 & 8 & 9 \leftarrow -5f_1 + f_3 \\ \hline 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \leftarrow \text{por } -\frac{5}{3} \\ 0 & 6 & 8 \\ \hline 1 & 2/5 & 1/5 \leftarrow -\frac{2}{5}f_2 + f_1 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 6 & 8 \leftarrow -6f_2 + f_3 \\ \hline 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \; * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

MATRIZ CANÓNICA

De la matriz canónica deducimos:
i) $\rho[A] = 2 = \rho[A/B]$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible.
ii) $2 < 3 \Rightarrow \exists$ infinita solución
iii) $3 - 2 = 1 \Rightarrow$ hay un parámetro
Hacer $x = t$, obtenemos de $*$:
$y = -\frac{1}{3} \quad z = \frac{4}{3}$

b$_2$) Si $a = 0$, $b \neq 1$, $b \neq 5 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

b$_3$) Si $b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - at \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in I\!R$

Dichos valores se hallan después de analizar la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|l} a & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \leftarrow -f_1 + f_2 \\ a & 1 & 4 & 1 \leftarrow -f_1 + f_3 \\ \hline a & 1 & 2 & 1 \leftarrow -2f_2 + f_1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \leftarrow -2f_2 + f_3 \\ \hline \text{I}\; a & 1 & 0 & 1 \\ \text{II}\; 0 & 0 & 1 & 0 \;(**) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow x & \uparrow y & \uparrow z & \end{array}\right]$$

De (**) deducimos:
i) $\rho[A] = 2 = \rho[A/B]$
$\Rightarrow$ el sistema es compatible.
ii) $2 < 3$
$\Rightarrow \exists$ infinita solución
iii) $3 - 2 = 1 \Rightarrow$ parámetro
Hacer $x = t$
De I : $at + y = 1$
$\Rightarrow \quad y = 1 - at$
De II : $z = 0$

b$_4$) Si $b = -1 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.
Dicho resultado se obtiene, después de reducir la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|l} a & -1 & 2 & 1 \\ a & -3 & 3 & 1 \leftarrow -f_1 + f_2 \\ a & -1 & 2 & -3 \leftarrow -f_1 + f_3 \\ \hline a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \leftarrow \text{por } -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline a & -1 & 2 & 1 \leftarrow f_2 + f_1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline a & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \;(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

De (α) deducimos:
$\rho[A] = 2$ $\neq$ $\rho[A/B] = 3$

Por tanto, el sistema es incompatible.

NOTA:
b$_1$) Se deduce de $x = \frac{5-b}{a(b+1)}$ pues $x = \frac{0}{0}$ cuando $a = 0 \wedge b = 5$
b$_3$) Se deduce: si $b = -1$, no están definidas las divisiones
$\frac{5-b}{a(b+1)}$, $\frac{-2}{b+1}$, $\frac{2(b-1)}{b+1}$

PROBLEMAS PROPUESTOS: GRUPO 1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

01 $\begin{cases} (5\lambda+1)x + 2\lambda y + (4\lambda+1)z = 1+\lambda \\ (4\lambda-1)x + (\lambda-1)y + (4\lambda-1)z = -1 \\ 2(3\lambda+1)x + 2\lambda y + (5\lambda+2)z = 2-\lambda \end{cases}$

Resp. $detA = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$.
Si $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, el sistema es incompatible. Si $\lambda = 0$, la solución depende de un parámetro

02 $\begin{cases} (2c+1)x - cy - (c+1)z = 2c \\ 3cx - (2c-1)y - (3c-1)z = c+1 \\ (c+2)x - y - 2cz = 2 \end{cases}$

Resp. $det\,A = 3(c+1)(c-1)^2$. Si $c = -1$, el sistema es incompatible. Si $c = 1$, la solución depende de dos parámetros.

03 $\begin{cases} 2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda+4 \\ (4x-1)x + (x+1)y + (2\lambda-1)z = 2\lambda+2 \\ (5\lambda-4)x + (\lambda+1)y + (3\lambda-4)z = \lambda-1 \end{cases}$

Resp. $det\,A = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Si $\lambda = 2$, $\lambda =$ 3; el sistema es incompatible. Si $\lambda = 1$, la solución depende de un parámetro.

04 $\begin{cases} (3\alpha-1)x + 2\alpha y + (3\alpha+1)z = 1 \\ 2\alpha x + 2\alpha y + (3\alpha+1)z = \alpha \\ (\alpha+1)x + (\alpha+1)y + 2(\alpha+1)z = \alpha^2 \end{cases}$

Resp. $det(A) = (\alpha-1)^2 \cdot (\alpha+1)$. Si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible. Si $\alpha = 1$, la solución depende de dos parámetros.

05 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

Resp. Si $a \neq b \neq c \Rightarrow x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$,

$$y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}$$

$$z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$$

Si $a = b$; $a \neq c$; $d = a$ o $d = c$, las soluciones dependen de un parámetro
Si $b = c$; $a \neq b$, $d = a$, $\alpha = b$, las soluciones dependen de un parámetro
Si $a = c$; $a \neq b$, $d = a$, $\alpha = b$, las soluciones dependen de un parámetro
Si $a = b = c = d$, las soluciones dependen de dos parámetros.

En todos los demás casos no tiene soluciones

06 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Resp. $x_1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t$

$x_2 = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}t$

$x_3 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t$

$x_4 = t$

DETERMINANTES

Ejemplos:

01 Aplicando propiedades, calcular:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \\ 0 & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a+b & 2x \\ a & x & 2x & a+b \\ b-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} a & a+b & 2x \\ x & 2x & a+b \\ b-a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a)\begin{vmatrix} a+b & 2x \\ 2x & a+b \end{vmatrix} = (b-a)^2[(a+b)^2-4x^2]$$

$$= (b-a)^2(a+b-2x)(a+b+2x)$$

02 Usando únicamente propiedades, demostrar que:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Solución:

1. Multiplicar a la 1^a, 2^a, 3^a y 4ª columnas por a, b, c y d, respectivamente:

$$= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ -ab & ab & cd & -cd \\ -ac & -bd & ac & bd \\ -ad & bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ -ab+ab+cd-cd & ab & cd & -cd \\ -ac-bd+ac+bd & -bd & ac & bd \\ -ad+bc-bc+ad & bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & ab & cd & -cd \\ 0 & -bd & ac & bd \\ 0 & bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{abcd}\begin{vmatrix} ab & cd & -cd \\ -bd & ac & bd \\ bc & -bc & ad \end{vmatrix}$$

$$= \frac{bcd\,(a^2+b^2+c^2+d^2)}{abcd}\begin{vmatrix} a & d & -c \\ -d & a & b \\ c & -b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d & -c \\ -d & a & b \end{matrix}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)}{a}[a^3-bcd+bcd-(-ac^2-ab^2-ad^2)]$$

$$= \frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^3+ac^2+ab^2+ad^2)$$

$$= \frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2)\,a\,(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

03 Probar que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1}a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Solución:

$$= a_0\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad -1 & x \end{vmatrix}.$$

$$= a_0\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & \frac{a_0x+a_1}{a_0} & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad -1 & x \end{vmatrix}.$$

$$a_0\frac{(a_0x+a_1)}{a_0}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & -1 & x & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0\frac{(a_0x+a_1)}{a_0}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & \frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a_0(a_0x+a_1)}{a_0}\frac{(a_0x^2+a_1x+a_2)}{a_0x+a_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1/a_0 & a_2/a_0 & a_3/a_0 \cdots & a_n/a_0 \\ 0 & 1 & \frac{a_2}{a_0x+a_1} & \frac{a_3}{a_0x+a_1} \cdots & \frac{a_n}{a_0x+a_1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_3}{a_0x^2+a_1x+a_2} \cdots & \frac{a_n}{a_0x^2+a_1x+a_2} \\ 0 & 0 & -1 & x & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad -1 & x \end{vmatrix}$$

En forma sucesiva, se va factorizando hasta convertir en matriz triangular en el que todos los elementos de la diagonal son unos y por tanto $det\,A = 1$.

$$= a_0\left(\frac{a_0x+a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{a_0x+a_1}\right)\left(\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{a_0x^2+a_1x+a_2}\right)\cdots\left(\frac{a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}}{a_0x^{n-2}+\dots+a_{n-2}}\right)\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}}\right) \quad (1)$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

04 Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx^2 & hx & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \cdots & h \end{vmatrix}$$

Solución:

Para hallar la forma general, vamos a inducir tomando un determinante de orden 4×4.

$$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 \\ hx^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 \\ x^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x+h & -1 & 0 \\ x^2 & x^2+hx & h & -1 \\ x^3 & x^3+hx^2 & hx & h \end{vmatrix} = h(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 0 \\ x^2 & x & h & -1 \\ x^3 & x^2 & hx & h \end{vmatrix}$$

$$h(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x+h & -1 \\ x^3 & x^2 & x^2+hx & h \end{vmatrix} = h(x+h)(x+h)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & -1 \\ x^3 & x^2 & x & h \end{vmatrix} = h\,(x+h)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & x+h \end{vmatrix} = h\,(x+h)^3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}}_{1}$$

En general: $|A| = h(x+h)^{n-1}$, si el orden de A es $n \times n$.

$= h(x+h)^3$

05

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}(-x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix} = (-x)(-x)\dots(-x)\begin{vmatrix} 0 & -1/x & -1/x & -1/x & \cdots & -1/x \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

(columnas multiplicadas por (-1) y sumadas a la primera)

$$= (-1)^{n-1}x^{n-1}\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & \cdots & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}x^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x} = (-1)^{n-1}x^{n-1}(n-1)\frac{1}{x} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

06 Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$ donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,sen\frac{2\pi}{n} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Resp.: $detA = n^{\frac{n}{2}}\, i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$

Solución:

1. Aplicar la propiedad: $|AB| = |A||B|$

   En este caso $B = A \Rightarrow |A||A| \Rightarrow |A^2| = |A|^2$

2. El número complejo $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,sen\frac{2\pi}{n}$ es la raíz primitiva de la ecuación $x^n = 1$, por tanto, sus raíces son $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$ y se cumplen:

   $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{n-1} = 0$, $\varepsilon^n = 1$

Además:

$$\text{Si } m \geq n \Rightarrow \varepsilon^m \begin{cases} 1, & \text{si } m = \dot{n} \\ \varepsilon, & \text{si } m = \dot{n}+1 \\ \varepsilon^2, & \text{si } m = \dot{n}+2 \\ \varepsilon^{n-1}, & \text{si } m = \dot{n}+(n-1) \end{cases}$$

3. Vamos a calcular los determinantes para $n = 2, 3, 4, 5$

Veamos:

Para $n = 2$

$$\Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 2^2 \quad \Rightarrow \Delta_2^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \Delta_2 = \pm\ 2$$

donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2} + i\,sen\frac{2\pi}{2}$

$= -1$

Entonces: $\varepsilon^2 = 1 \;\; y \;\; 1+\varepsilon = 0$

Para $n = 3$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1+1+1 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 & 1+\varepsilon^3+\varepsilon^6 \\ 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 & 1+\varepsilon^3+\varepsilon^6 & 1+\varepsilon^4+\varepsilon^8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3^3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} = -3^3$$

Donde: $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2} + i\,sen\frac{2\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow \Delta_3^2 = -3^3$

$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \;,\; \varepsilon^3 = 1$ $\quad \Rightarrow \Delta_3 = \pm\ 3^{3/2} i$

Para $n = 4$

$$\Delta_4^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2+2\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 2+2\varepsilon^2 & 0 & 4 \\ 2+2\varepsilon^2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2+2\varepsilon^2 \end{vmatrix} = 4^4(-1)$$

Donde: $\varepsilon = \cos 2\pi/4 + i \text{ sen } 2\pi/4 \;,\; 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 = 0 \;,\; \varepsilon^4 = 1 \;,\; \varepsilon^2 = -1$

Para $n = 5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon^4 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \varepsilon^8 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \varepsilon^{12} \\ 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^8 & \varepsilon^{12} & \varepsilon^{16} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5^5$$

Donde: $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,sen\frac{2\pi}{5}$ $\quad \Rightarrow \Delta_5^2 = 5^5 \Rightarrow \Delta_5 = -5^{5/2}$

$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0 \;,\; \varepsilon^5 = 1$

07 Definición: Si $A = [a_{ij}]_n$ es una matriz cuadrada, el determinante $f(\lambda) = det(\lambda I - A)$ se denomina polinomio característico y las raíces de $det(\lambda I - A) = 0$ se llaman autovalores.

Dada la matriz: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

a) Hallar el polinomio característico asociado a la matriz A.

b) Hallar los autovalores.

08 Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución de 08:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & x & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x-x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & x-x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & x-x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n) = 0$$

$$\Rightarrow x = x_1 \;,\; x = x_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; x = x_{n-1} \;,\; x = x_n$$

09

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3$$

Solución de 07:

a) $$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

b) $f(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$

Propiedades:

1. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = det\, A$

2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr\,(A)$

10 Resolver: $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

1. En $AX = B$, si A es no singular, entonces existe A^{-1}. Por tanto se puede multiplicar en ambos miembros por A^{-1}, por la izquierda:

   $A^{-1}AX = A^{-1}AB \Rightarrow X = A^{-1}B$

2. Hallar A^{-1} por el método de Gauss Jordán:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \\ (-1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = A^{-1}$$

3. Luego: $X = A^{-1}B$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS: GRUPO 2

Hallar el rango de las siguientes matrices:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$ $\rho = 2$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\rho = 2$

3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\rho = 3$

Discutir y hallar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

$X = (1, 0, 1)$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$

$X = (10 + 11a, -2 - 4a, a, 0)$

6) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

$X = \left(-\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b, a, \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b, b\right)$

7) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$

$x = \frac{1}{3}, \ y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{7}{3}$

8) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

$X = \left(2, \frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

9) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

$X = (1, 2a, a, -3b, b)$

10) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

$X =$ es incompatible y carece de solución

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$X = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b, a, b\right)$

12) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

$X = (1, -1, 2, -2)$

13) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$X = (-a - 1, a, -b, o, b)$

14) Discutir el sisguiente sistema según los valores de α.

$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 1 - \alpha \\ x + \alpha y - z = -1 \\ 3x + y + z = \alpha \end{cases}$

Solución: Si $\alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq 3 \Rightarrow$ tiene solución única.

Si $\alpha = 2$, el sistema es inconsistente.

Si $\alpha = 3$, no existe solución (inconsistente)

15) Estudiar el sistema para los distintos valores de a.

$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 5 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases}$

Solución: Si $\alpha \neq \pm 1$ existe solución única.

Si $\alpha = -1$ el sistema es inconsistente.

Si $\alpha = 1$ el sistema es inconsistente.

16) Estudiar el sistema para los distintos valores de a y b.

$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + b = 0 \\ x + ay - 6z + 10 = 0 \end{cases}$

Solución: Tiene única solución. si $a \neq 7$

17) Resolver el sistema:

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$

Solución: $X = (-3a - 4b - 2c, a, -2b, b, c, {}^1/_3)$.

18) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$

$X = (1, 2s, s, -3t, t)$

19) ¿Para qué valor (es) de λ el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales?

$$\begin{cases}(\lambda-3)x + \quad y = 0\\ \quad x + (\lambda-3)y = 0\end{cases}$$

Solución: a) Para $\lambda = 4$, $X = (t, -t)$
b) Para $\lambda = 2$, $X = (t, t)$, $t \in I\!R$

20) ¿Para qué valores de "a" no tendrá soluciones el siguiente sistema? ¿Para qué valores tendrá exactamente una solución? ¿Para qué valores tendrá un número infinito de soluciones?

$$\begin{cases}x + 2y \quad - 3z = 4\\ 3x - y \quad + 5z = 2\\ 4x + y + (a^2-14)z = a+2\end{cases}$$

Solución: $a = 4$, número infinito de soluciones; $a = -4$, no hay solución; $a \neq \pm 4$, exactamente una solución.

21)
$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2\\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0\end{cases}$$

Solución: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

22)
$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4\\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4\\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6\end{cases}$$

Solución: El sistema es incompatible.

23)
$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0\end{cases}$$

Solución: $x_4 = x_5$, $x_2 = -2x_3 - 12x_5$
$x_1 = x_3 + 15x_5$,
$x_5 = x_5$,
$x_3 = x_3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS: GRUPO 3

1. Hallar la inversa de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4\\ -1 & -1 & 5\\ 2 & 7 & -3\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & 13 & -6\end{bmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} ; \; B^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & -11 & 3\\ 7/2 & 5/2 & -1/2\\ -5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix} , \; D^{-1} \text{ no existe.}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

Hallar $g(A)$, siendo $g(x) = x^2 - x - 8$

Solución: $g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

3. Escribir la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ como la suma de una matriz simétrica B y una antisimétrica C.

Solución: $B = \begin{bmatrix} 2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

4. Hallar los valores de $x, y, z, s, t,$ si $A = \begin{bmatrix} x & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & y\\ z & s & t\end{bmatrix}$ es ortogonal

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{bmatrix} \text{ o } A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$$

5. Dada la matriz diagonal por bloques

$$A = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 1 & 2 & & & \\ 3 & 4 & & & \\ \hdashline & & 5 & & \\ \hdashline & & & 1 & 3\\ & & & 5 & 7\end{array}\right]$$ hallar A^2

Solución:

$$A^2 = \left[\begin{array}{cc:c:cc} 7 & 10 & & & \\ 15 & 22 & & & \\ \hdashline & & 25 & & \\ \hdashline & & & 16 & 24\\ & & & 40 & 64\end{array}\right]$$

6. Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2\\ -3 & 7 & -5\\ 2 & -5 & 8\end{bmatrix}$$

hallar la matriz diagonal $B = P^T AP$, donde P es una matriz no singular.

Solución:

Partiendo de las matrices $[A/I]$ y mediante operaciones elementales sobre las filas y columnas de las matrices.

$[A/I]$ "convertir" la matriz A en matriz diagonal y la matriz I en la matriz P^T , esto es:

$$[A \mid I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\qquad\qquad B \qquad\qquad B^T$

7. a) La forma cuadrática con dos variables es:

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$= [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica.

Encontrar la matriz simétrica A, asociada a la forma cuadrática:

a) $q(x,y) = 4x^2 + 5xy - 7y^2$

b) $q(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$

Solución:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & -7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

8. La forma cuadrática con dos variables es:

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,mxy + 2\,nxz + 2\,ryz$$

$$= [x \quad y \quad z]\underbrace{\begin{bmatrix} a & m & n \\ m & b & r \\ n & r & c \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A es una matriz simétrica.

Sea $q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 8xz - 12\,yz + 9z^2$.

Encontrar una sustitución lineal no singular que exprese las variables x, y, z en términos de las variables r, s, t de forma que $q(r, s, t)$ sea diagonal.

Solución:

mediante operaciones elementales reducir la matriz:

$$[A \mid I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\qquad\qquad B \qquad\qquad P^T$

se cumple: $\quad B = P^T A P$

a) De los vectores columna de P^T obtenemos: $x = r - 2s$, $y = s + 2t$, $z = t$

b) De la matriz B obtenemos:

$$q(r,s,t) = r^2 - s^2 + 3t^2$$

9. Sea:

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4xz - 4yz + 7z^2$$

¿Es q definida positiva?

Solución:

Mediante operaciones elementales sobre las filas y columnas, reducir la matriz A a la forma diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si todos los elementos de la diagonal son positivos afirmamos que q es definida positiva.

En este caso: 1, 2 y 1 son positivos y por tanto q es definida positiva.

CAPÍTULO 3

ESPACIOS VECTORIALES

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal, trata del estudio de los espacios vectoriales, de las transformaciones lineales, de las matrices y sistema de ecuaciones lineales, de los determinantes, de los valores característicos y vectores características, de los espacios con producto interno y los operadores sobre espacios con producto interno.

Para hacer una definición formal y rigurosa de los múltiples temas que se tratan en el álgebra lineal es necesario recordar algunas definiciones preliminares.

1.1 PRODUCTO DE DOS CONJUNTOS

Definicion 1: El producto del conjunto A por el conjunto B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) tales que "a" es un elemento de A y "b" es un elemento de B.

Simbólicamente: $A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$

Cuando $A \subseteq I\!R \wedge B \subseteq I\!R$, entonces $A \times B$ toma el nombre de producto cartesiano de A por B.

1.2 APLICACIÓN DE A EN B

Diremos que f es una aplicación o función de A en B, si, y sólo si, para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$, tal que $y = f(x)$.

NOTACION: $\quad f : A \longrightarrow B \qquad x \longmapsto y = f(x)$ $\qquad$, $\qquad A$ = Dominio de f

EJEMPLO 01

1) $f : I\!N - \{0\} \longrightarrow I\!R$, $\quad n \longmapsto f(n) = \frac{2}{n}$

2) $g : [-3,3] \longrightarrow [0,3]$, $\quad x \longmapsto g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1.3 OPERACIÓN BINARIA INTERNA

Sea A un conjunto no vacío.

Llamamos **OPERACIÓN BINARIA INTERNA** definida en A, a toda aplicación "*" de $A \times A$ en A, tal que a cada pareja $(a,b) \in A \times A$ corresponde el único elemento $a * b$ perteneciente al conjunto A.

NOTACIÓN: $* : A \times A \longrightarrow A$, $(a,b) \longmapsto a * b$

EJEMPLO 02

1) En el conjunto $I\!R$ definimos dos operaciones binarias:

$+ : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $(a,b) \longmapsto a+b$ $\qquad \bullet : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$, $(a,b) \longmapsto a \bullet b$

llamados suma y producto de números reales, respectivamente.

2) En el conjunto $I\!R^2$, definimos la siguiente operación binaria:

$$+ : I\!R^2 \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$$
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

llamado suma de vectores en $I\!R^2$

1.4 CUERPO

Un conjunto $I\!K \neq \phi$ se llama **CUERPO**, si en $I\!K$ están definidas las operaciones de Suma y Producto, y verifican las siguientes propiedades:

A) SUMA $+ : I\!K \times I\!K \longrightarrow I\!K$, $(a,b) \longmapsto a+b$

A$_1$) $a+(b+c)=(a+b)+c$ **(asociativa)**

A$_2$) $a+b=b+a$ **(conmutativa)**

A$_3$) $\exists! \, O \in I\!K \,/\, O+a=a$, $\forall a \in I\!K$, "O" se llama cero **(existencia de cero)**

A$_4$) $\forall a \in I\!K$, $\exists -a \in I\!K \,/\, a+(-a)=0$; $-a$ se llama opuesto de a **(existencia y unicidad del opuesto)**

P) PRODUCTO $\bullet : I\!K \times I\!K \longrightarrow I\!K$, $(a,b) \longmapsto a \bullet b$

P$_1$) $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ **(asociativa)**

P$_2$) $a \bullet b = b \bullet a$ **(conmutativa)**

P$_3$) $\exists ! 1 \in I\!K / 1 \bullet a = a$, $\forall a \in I\!K$, "1" se llama UNO **($\exists$ del 1)**

P$_4$) $\forall a \neq O, \exists ! \, a^{-1} / a \bullet a^{-1} = 1$, a^{-1} se llama la inversa de a **($\exists$ del inverso)**

D) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

$a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$

EJEMPLO 03

Son cuerpos los números reales ($I\!R$), los números complejos ($\mathbb{C}$) y los números racionales (Q).

Nota: a los elementos del cuerpo $I\!K$, se les llamará **escalares**.

2. ESPACIO VECTORIAL

Definicion 02. Un conjunto V, no vacio, se llama **ESPACIO VECTORIAL** sobre $I\!K$, si está provisto de dos operaciones: suma (+) y producto (.), definidos de la siguiente manera :

$+ : V \times V \longrightarrow V$, $(u,v) \longmapsto u+v$ $\qquad \bullet : I\!K \times V \longrightarrow V$, $(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$

"La suma de dos vectores es otro vector" $\qquad$ "El producto de un escalar por un vector, es otro vector"

y que cumple las siguientes propiedades:

A$_1$) $\mu + v = v + \mu$; $\mu, v \in V$

A$_2$) $(\mu + v) + w = \mu + (v + w)$; $\mu, v, w \in V$

A$_3$) $\exists ! \, \mathbf{O} \in V / v + \mathbf{O} = v$, $\forall v \in V$ (**O** es el elemento cero)

A$_4$) $\forall v \in V$, $\exists ! -v / v + (-v) = \mathbf{O}$ ($-v$ se llama opuesto de v)

P$_1$) $\alpha(\beta v) = (\alpha \beta) v$, $\forall \alpha, \beta \in I\!K$, $v \in V$

P$_2$) $1 \bullet v = v, \forall v \in V$, $1 \in I\!K$

DISTRIBUTIVIDAD:

$D_1)$ $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$, $\alpha,\beta \in I\!K$; $v \in V$

$D_2)$ $\alpha(\mu+v) = \alpha\mu+\alpha v$, $\alpha \in I\!K$; $\mu, v \in I\!K$

Los elementos de V se llaman **VECTORES** y los elementos de $I\!K$ se llaman **ESCALARES.**

Como V está definido sobre los elementos de $I\!K$, decimos que V es un $I\!K$– espacio vectorial.

Por ejemplo:

Si $I\!K = I\!R$, entonces decimos que V es un espacio vectorial sobre $I\!R$ o V es un $I\!R$– espacio vectorial o simplemente que V es un espacio vectorial real.

Si $I\!K = \mathbb{C}$, entonces decimos que V es un espacio vectorial complejo.

2.1 EJEMPLO 04

Son espacios vectoriales los siguientes conjuntos:

1) $V = I\!R^2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \in I\!R \wedge x_2 \in I\!R\}$ y $I\!K = I\!R$
   Decimos que $I\!R^2$ es un $I\!R$–espacio vectorial

2) $V = I\!R^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) / x_i \in I\!R\}$ y $I\!K = I\!R$
   Decimos que $I\!R^n$ es espacio vectorial sobre $I\!R$

3) $V = I\!K^{n\times m}$, $I\!K = I\!R$
   └── es el conjunto de matrices sobre $I\!R$ de orden $n \times m$.

4) En $I\!R^2$ cualquier recta que pasa por el origen, es un espacio vectorial sobre $I\!R$.
   Por ejemplo $V = \{(x,y) \in I\!R^2 / 2x - y = 0\}$

5) En $I\!R^3$ cualquier plano que pasa por el origen, es un espacio vectorial sobre $I\!R$.
   Por ejemplo $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^2 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

6) El conjunto de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes complejos.

   NOTACIÓN: $I\!K[x] = \{P(x) / P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ , \ a_i \in I\!K = \mathbb{C}\}$

7) $V = \{rx + se^x / r, s \in I\!R\}$ es un espacio vectorial sobre $I\!R$.

   Existen espacios vectoriales de mayor complejidad que se construyen a partir de otros espacios vectoriales y que se verán mas adelante.

2.2 SUBESPACIO VECTORIAL

Definicion 03. Sea V un $I\!K$– espacio vectorial.
Un **subespacio vectorial** de V es un subconjunto $W \subset V$, con las siguientes propiedades:

1. $O \in W$
2. Si $(w_1 \in W \wedge w_2 \in W)$ entonces $(w_1 + w_2) \in W$.
   Esta propiedad indica que "Si dos vectores pertenecen al conjunto W, implica que la suma de dichos vectores también pertenece al conjunto W".
3. Si $v \in W$ entonces, para todo $\alpha \in I\!K$, $\alpha v \in W$.
   Esta propiedad indica: "si α es un escalar cualquiera y w es un vector perteneciente a W, implica que el producto αw es un vector de W".

PROPOSICIÓN 1

Un subconjunto $W \neq \phi$ de V es un subespacio si, y sólo si:

$(\alpha u + \beta w) \in W$, $\forall\ \alpha, \beta \in I\!K$ y $u, w \in W$.

Generalizando: dados $v_1, \ldots, v_n \in W$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I\!K$ se cumple:

$v = \alpha_1 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in W$

EJEMPLO 05

$\{O\}$ y V son ejemplos triviales de subespacios de V.
A todos los subespacios que no sean $\{O\}$ ni V, se les llama **Subespacios Propios.**

EJEMPLO 06

$W = \{(x,y) \in I\!R^2 / y = mx \ , \ m \neq 0\}$ es un subespacio de $I\!R^2$. Geométricamente: W es el conjunto de las rectas que pasan por el origen.

Prueba:

Para afirmar que W es un subespacio de $I\!R^2$, debo probar que el conjunto W cumpla las tres propiedades dadas en la definición:

1. La afirmación $0 = (0,0) \in W$ es verdadero, porque:
   $0 = m(0)$, $m \neq 0$
   $= 0$ implica que $(0,0) \in W$.

2. Elegir dos vectores que $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ de W. Debo probar que $(w_1 + w_2) \in W$.
¿Cómo afirmar que $(w_1 + w_2) \in W$?
Bastará hacer cumplir la condición: $(y_1 + y_2) = m\,(x_1 + x_2)$ para afirmar que $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2\, , y_1 + y_2)$ pertenezca a W.
Veamos:
Si $w_1 = (x_1 , y_1) \in W$ entonces $y_1 = mx_1$, esto es , $(x_1 , mx_1) \in W$.
Si $w_2 = (x_2 , y_2) \in W$ entonces $y_2 = mx_2$, esto es , $(x_2 , mx_2) \in W$.
Ahora, sumar: $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$
$= (x_1 + x_2 , mx_1 + mx_2)$
$= (x_1 + x_2 , m(x_1 + x_2)) \in W$.
Pues $y_1 + y_2 = m\,(x_1 + x_2)$.

3. Para cualquier escalar $\alpha \in I\!K$ y un vector $v = (x,y) \in W$. Debo probar que $(\alpha\, v) \in W$.
¿Cómo afirmar que $(\alpha\, v) \in W$?
Bastará que cumpla la condición $\alpha y = m\,(\alpha x)$, siendo $v = (x,y)$.
Veamos: si $v = (x,y) \in W$ entonces $y = mx$.
Hacer: $\alpha v = (\alpha x , \alpha y)$. Como $y = mx$, entonces
$\alpha v = (\alpha x , \alpha (m\alpha))$
$= (\alpha x , m\,(\alpha x)) \in W$. Pues $\alpha y = m(\alpha x)$.

EJEMPLO 07

$S = \{(x,y, z) \in I\!R^2 \,/\, ax + by + cz = 0$, $a, b, c \in I\!R\}$ es un subespacio de $I\!R^3$.
Geométricamente S es un plano que pasa por el origen. Por lo que podemos afirmar que: todo plano que pasa por el origen es un subespacio de $I\!R^3$.

EJEMPLO 08

En general $H = \{(x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n) \in I\!R^n \,/\, a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots\ldots + a_n\, x_n = 0\}$ es un subespacio de $I\!R^n$. H se llama hiperplano en $I\!R^n$ que pasa por el origen de coordenadas $(0 , 0 , 0 , \ldots\ldots, 0)$

2.3 SUMA DE SUBESPACIOS Y SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS.

Definicion 4: Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial V, la suma de los subespacios U y W se define del siguiente modo:

$$U + W = \{\, u + w \,/\, u \in U\, , w \in W\,\}$$

CONSECUENCIAS:

1) En general $U + W \neq U \cup W$, pues $U \cup W$ no siempre es un subespacio.

2) $U \cup W \subset U + W$

3) $\begin{cases} U \subset U + W \\ W \subset U + W \end{cases}$

4) Si T es un subespacio de V tal que $U \cup W \subset T$, entonces $U + W \subset T$

5) $U + W$ es el menor subespacio que contiene a $U \cup W$.

SUMA DIRECTA DE DOS SUBESPACIOS

Cuando los subespacios U y W de V tienen en común sólo el elemento nulo 0, se escribe $U \oplus W$ en vez de $U + W$ y se dice que $V = U \oplus W$ es la suma directa de U y W.

NOTACIÓN: $U \oplus W = \{u + w \,/\, u \in U\, , w \in W\, , U \cap W = \{O\}\}$

TEOREMA 1 Sea V un espacio vectorial.
S y T subespacios de V. Entonces:
a) $S \cap T$ es un subespacio de V.
b) $S + T$ es un subespacio de V.

Demostracion de a):

Para afirmar que $S \cap T$ es un subespacio de V, sabiendo que S y T son subespacios de V, debo probar tres cosas:

1. $\mathbf{O} \in S \cap T$
2. Si $(v_1 \in S \cap T \wedge v_2 \in S \cap T) \Rightarrow (v_1 + v_2) \in S \cap T$
3. Si $(\forall \alpha \in I\!K \;\wedge v \in S \cap T) \quad \Rightarrow \; \alpha v \in S \cap T.$

Veamos:
1. $\mathbf{O} \in S$, $\mathbf{O} \in T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O} \in S \cap T$

2. *i)* si $v_1 \in S \cap T \;\Rightarrow\; v_1 \in S \;\wedge\; v_1 \in T$ ……… def . de $\cap$
Si $v_2 \in S \cap T \;\Rightarrow\; v_2 \in S \;\wedge\; v_2 \in T$ ……… def . de $\cap$
$(v_1 + v_2) \in S \;\wedge\; (v_1 + v_2) \in T$

La suma pertenece a S, porque S es subespacio.
La suma pertenece a T, porque T es subespacio.

ii) Si $(v_1 + v_2) \in S \;\wedge\; (v_1 + v_2) \in T \;\Rightarrow\;$ $\boxed{(v_1 + v_2) \in S \cap T}$ (2*)

3. *i)* Si $v \in S \cap T \quad \Rightarrow \quad v \in S \quad \wedge \quad v \in T$

ii) Como S y T son subespacios $\quad \Rightarrow \quad (\alpha v) \in S \wedge (\alpha v) \in T , \forall \alpha \in I\!K$.

iii) Si $(\alpha v) \in S \wedge (\alpha v) \in T \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\alpha v) \in S \cap T}$ — (3*)

4. Por (1*), (2*) y (3*) afirmamos que: $S \cap T$ es un subespacio de V.

Demostración de b):

Para afirmar que $S + T$ es un subespacio de V, debo probar tres cosas:

1. $\mathbf{O} \in S + T$
2. Si $[u \in (S+T) \wedge v \in (S+T)] \Rightarrow (u+v) \in S+T$
3. $[\forall \alpha \in I\!K \wedge v \in (S+T)] \Rightarrow (\alpha v) \in S+T$

Veamos:

1. $\mathbf{O} \in (S+T)$, pues $\mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{O}$, $\mathbf{O} \in S$, $\mathbf{O} \in T$.

2. *i)* si $u \in (S+T) \Rightarrow u = u_1 + u_2$; donde $u_1 \in S$, $u_2 \in S$

ii) si $v \in (S+T) \Rightarrow v = v_1 + v_2$; donde $v_1 \in S$, $v_2 \in S$

iii) Como S y T son subespacios de V, entonces:

si $[u_1 \in S \wedge v_1 \in S] \Rightarrow (u_1 + v_1) \in S$

si $[u_2 \in T \wedge v_2 \in T] \Rightarrow (u_2 + v_2) \in T$

$\underbrace{(u_1 + u_2)}_{u} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{v} \in (S+T)$

$u + v \in (S+T)$ .... (2*)

3. Si $v \in (S+T) \Rightarrow v = v_1 + v_2$, donde $(v_1 \in S , v_2 \in T)$.

Como S y T son subespacios de V, entonces:

Si $(v_1 \in S \wedge \alpha \in I\!K) \Rightarrow \alpha v_1 \in S$

Si $(v_2 \in T \wedge \alpha \in I\!K) \Rightarrow \alpha v_2 \in T$

$\alpha v_1 + \alpha v_2 = \alpha \underbrace{(v_1 + v_2)}_{v}$

$= \alpha v \in (S+T)$ .... (3*)

Por (2*) y (3*) afirmamos que $S + T$ es un subespacio de V, siempre que S y T sean subespacios de V.

2.4 ESPACIO COCIENTE

El concepto de **ESPACIO COCIENTE** es un tema abstracto muy importante y para definirlo requerimos de otras definiciones.

Definicion 5: Sea V un $I\!K$– espacio vectorial y V' un subespacio de V.

Se dice que dos **VECTORES** u y v pertenecientes a V son equivalentes modulo V' , si $(u - v)$ pertenece a V'.

NOTACIÓN: $\quad u \sim v \mod V' \iff (u - v) \in V' \, , u \in V \, , v \in V$

"u es equivalente a v modulo V'" si, y sólo si, $(u - v)$ es un elemento de V'.

Según esta definición u y v son elementos de V, pero la diferencia $u - v$ es un elemento de V'.

PROPOSICIÓN 2 La relación "~" es de equivalencia.

Prueba:

Para afirmar que "~" es una relación de equivalencia, debemos probar 3 condiciones:

a) "~" es reflexiva, porque: $u \sim u$, $\forall u \in V$

b) "~" es simétrica, porque: $u \sim v$ implica $v \sim u$, $u, v \in V$

c) "~" es transitiva, porque: $u \sim v$ y $v \sim w$ entonces $u \sim w$, $u, v, w \in V$

Prueba de a):

Como V' es subespacio de V, se cumple: $0 \in V'$

Pero: $u - u = 0$, $\forall u \in V$

Luego, $u - u = 0 \in V'$ implica $u \sim u$, $\forall u \in V$

Prueba de b):

Como hipótesis tenemos $u \sim v$, $u, v \in V$

Debo probar que $v \sim u$. Para esto, bastara probar que $(v - u) \in V'$

Veamos:

Si $u \sim v$, entonces $(u - v) \in V'$ .... por def. 5

Pero $(u - v) = -(v - u) \in V'$

Si $-(v - u) \in V'$ entonces $(v - u) \in V'$ porque V' es subespacio de V.

En general: $-w \in V'$ implica $w \in V'$

Prueba de c):

Como hipótesis tenemos: $u \sim v$ y $v \sim w$.

Debo probar que $u \sim w$. Para ello bastará probar que $(u-w) \in V'$

Veamos:

Si $u \sim v \Rightarrow (u-v) \in V'$, $u, v \in V$

Si $v \sim w \Rightarrow (v-w) \in V'$, $v, w \in V$

Como V' es subespacio de V, se cumple que la suma $(u-v)+(v-w)=u-w$ también es un elemento de V'.

Por tanto: si $(u-w) \in V'$ implica $u \sim w$.

Definicion 6: ***(clase de equivalencia)***

Sea v un vector fijo del espacio vectorial V y V' un subespacio de V.

El conjunto $\bar{v} = \{ u \in V / u \sim v \}$ es la clase de equivalencia de v.

$$= \{ u \in V \,/\, (u-v) \in V' \} = v + V' = \{ v + v' / v' \in V \}$$

EJEMPLO 09

Sea $V = I\!R^2$ un espacio vectorial sobre $I\!R$.

Cualquier recta que pasa por el origen de coordenadas es un subespacio vectorial de $I\!R^2$

Tomemos el subespacio $V' = \{ t(1,2) / \ t \in I\!R \}$ que viene a ser una recta que pasa por el origen cuyo vector director es $\vec{a} = (1, 2)$.

Cada vez que fijamos un vector $v \in I\!R^2$, **podremos definir una clase de equivalencia.**

Por ejemplo:

1) Si fijo el vector $v = (3,1) \in V = I\!R^2$, entonces defino

$\overline{(3,1)} = \{ u \in V / u \sim (3,1) \}$

$\overline{(3,1)} = \{ u \in V / (u-(3,1)) \in V' \}$

$= \{ u \in V / u - (3,1) = t(1,2) \}$

$= \{ u \in V / u = (3,1) + t(1,2) \}$ que es una recta que pasa por (3,1) y es paralela a la recta V'

2) $\overline{(5,2)} = \{ u \in V / u = (5,2) + t(1,2) \}$ es otra recta, pasa por (5,2) y es paralela a la recta V'.

3) En general, si fijo el vector $P_0 \in I\!R^2 = V$, entonces defino:

$\overline{P_0} = \{ P \in V / P \sim P_0 \}$

$= \{ P \in V / (P - P_0) \in V' \}$

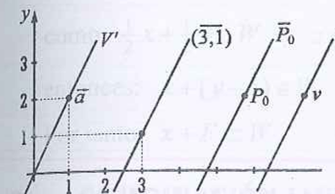
$= \{ P \in V / P - P_0 = t(1,2) \}$

$= \{ P \in V / P = P_0 + t(1,2) \}$

Es una recta que pasa por P_0 y es paralela a la recta V'

NOTA: cualquier vector de V' tiene la forma $t(1,2)$ o $s(1,1)$ o $r(1,2)$ donde t, s, r es cualquier número real, llamado parámetro.

ILUSTRACIÓN GRÁFICA:



En general:

$\bar{v} = v + V'$, v es fijo

$= \{ v + v' / v' \in V' \}$

Propiedad: Si $\mu \neq v$, entonces $\bar{\mu} \cap \bar{v} = \phi$.

$\bar{v}$: clase de equivalencia de v.

Definición 07: (Espacio cociente)

Dado el espacio vectorial V y el subespacio vectorial $V' \subset V$, definimos el ***espacio cociente*** V/V' como el conjunto de las clases de equivalencia.

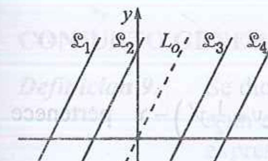
Esto es, $V/V' = \{ \bar{v} / v \in V \}$

Geometricamente:

Como $V' = \{ t(1,2) \ ; t \in I\!R \}$ es una recta en $V = I\!R^2$ que pasa por (0,0), entonces el espacio V/V' es el conjunto de todas las rectas paralelas a V', que pasan por cualquier punto $v \in V$.

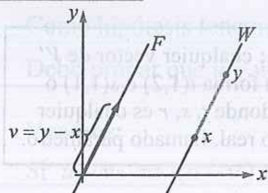
Las rectas y los planos que no pasan por el origen están incluidas dentro de la noción de **variedad afín.**

Se dice que un subconjunto $W \subset V$ es una **variedad afín** cuando la recta que pasa por dos puntos cualesquiera de W, está contenida en W. Esto es, $W \subset V$ es una **variedad afín** si, y sólo si, cumple la siguiente condición: $x, y \in W$, $t \in I\!R \Rightarrow (1-t)x + ty \in W$



Las rectas $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ que son paralelas a la recta L_0 son variedades afines.

TEOREMA 2



Sea W una variedad afín no vacía en el espacio vectorial V. Existe un único subespacio vectorial $F \subset V$ tal que, para todo $x \in W$, se tiene:

$W = x + F = \{ x + v \, ; v \in F \}$

Demostración:

Dada W, sea $F = \{ v = y - x / x , y \in W \}$. En W, x es fijo; v varía en F.

Probaremos la veracidad de tres enunciados:

1) F es un subespacio vectorial.
2) $W = x + F$ ... (el conjunto W es igual al conjunto $x + F$)
3) La unicidad de F.

Prueba de 1):

i) $\mathrm{O} \in F$, porque $\mathrm{O} = x - x$, $x \in F$, $\mathrm{O} \in V$.

ii) Si $\alpha \in I\!R$ y $v \in F$ debo probar que $\alpha v \in F$.

Si $v \in F$ entonces $v = y - x$ con $x , y \in W$

Luego

$$\begin{aligned} \alpha v &= \alpha (y - x) \\ &= \alpha y - \alpha x \\ &= \alpha y - \underline{\alpha x} + \underline{\underline{x}} - x \ldots \text{(sumar y restar } x) \\ &= [\underbrace{(1-\alpha)x + \alpha y}] - x \text{, con } z \in W \text{ porque } W \text{ es una variedad afín.} \end{aligned}$$

Entonces $\alpha v = z - x$ es un elemento de F .

iii) Elegir dos elementos de F, digamos $v = y - x$ y $v' = y' - x$, con $y , y', x \in W$.

Por demostrar que: $v + v' \in F$

Veamos:
$$\begin{aligned} v + v' &= y - x + y' - x \\ &= y + y' - 2x = 2 \cdot \tfrac{1}{2} y + 2 \cdot \tfrac{1}{2} y' - 2x \\ &= 2 \left[\left(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} y' \right) - x \right] \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y' \in W$, entonces el vector $w = \left(\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y' \right) - x$ pertenece a F.

Tendremos que $v + v' = 2w$, por tanto $v + v' \in F$.

Prueba de 2):

Para todo $x \in W$, probemos que:

$W = x + F$

i) $(\subset)$ si $y \in W \Rightarrow y = x + (y - x)$

con $y - x \in F$, luego $y \in (x + F)$

Esto prueba que $W \subset x + F$.

ii) $(\supset)$ un elemento de $x + F$ tiene la forma $x + (y - z)$ con $y , z \in W$

Pero: $x + y - z = 2\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y \right) + (-1) z$

como: $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y \in W$ y $z \in W$

entonces: $x + (y - z) \in W$

Por tanto: $x + F \subset W$

Prueba de 3):

Si F y F' son subespacios vectoriales de V, tales que $x + F = x + F'$, para algun $x \in V$, probaremos que $F = F'$.

En efecto:

$$\begin{aligned} v \in F &\Rightarrow x + v \in x + F \\ &\Rightarrow x + v \in x + F' \\ &\Rightarrow x + v = x + v' \quad (v' \in F') \\ &\Rightarrow v = v' \\ &\Rightarrow v \in F' \end{aligned}$$

Por tanto: $F \subset F'$

De manera similar se demuestra que $F' \subset F$

3. COMBINACIÓN LINEAL Y ESPACIO GENERADO

3.1 COMBINACION LINEAL

Definicion 8: Sea $v_1 , v_2 , \ldots\ldots , v_n$ un conjunto de vectores pertenecientes al espacio vectorial V.

Diremos que el vector $v \in V$ es **COMBINACION LINEAL** de los vectores $v_1 , v_2 , \ldots , v_m$, si existen escalares $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ tales que:

$$\boxed{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n} \quad \text{los } \alpha_i \text{ son únicos.}$$

EJEMPLOS

1) El vector $(3,-5) \in I\!R^2$ es combinación lineal de $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ porque $(3,-5) = 3i - 5j$

2) El vector $(x,y,z) \in I\!R^3$ es combinación lineal de $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$; porque: $(x,y,z) = xi + yj + zk$.

3.2 CONJUNTO GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definicion 9. Se dice que el conjunto de vectores $v_1 , v_2 , \ldots\ldots , v_n$ pertenecientes a un espacio vectorial V generan V, si todo vector $v \in V$ se puede expresar como combinación lineal de ellos.

Dicho de otra manera:

$v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ es un ***conjunto generador*** de V, si para todo vector $v \in V$ existen escalas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ tales que, $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$.

Ejemplo 10

1) $\{i, j\}$ es un conjunto generador de $I\!R^2$, $i = (1,0)$, $j = (0,1)$
2) $\{i, j, k\}$ es un conjunto generador de $I\!R^3$, $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$.
3) Sea $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ un subespacio vectorial de $I\!R^3$.
   Hallar el conjunto generador de T

Solución:

De la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ despejar cualquier variable y sustituir en (x_1, x_2, x_3) para luego descomponer en suma de vectores.

Veamos:

Despejar x_3 : $x_3 = -x_1 - x_2$

Sustituir en (x_1, x_2, x_3) :
$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2)$

Descomponer: $= x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1)$

estos 2 vectores constituyen el conjunto generador de T

Es decir: $T = \mathfrak{L}\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$

4) Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Big/ \ a_{ii} = 0 , a_{ij} = a_{ji} \right\}$

Hallar el conjunto generador de W.

Solución:

Las matrices de W son de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & 0 & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} = a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto generador de W es: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

3.3 ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Definicion 10. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de un espacio vectorial V, definimos:

$$\mathfrak{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{ v \in V \,/\, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n , \alpha_i \in I\!K \}$$

Se lee "El espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_n$."

TEOREMA 3 $\mathfrak{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un subespacio de V

Prueba:

1. $\mathbf{O} \in \mathfrak{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \neq \phi$, puesto que $\mathbf{O} = 0v_1 + \ldots + 0v_n$.

2. Sean v y w vectores de $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Debo probar que $v + w$ es un elemento de $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

   Veamos:

   Si $v \in \mathfrak{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \Rightarrow \exists\, \alpha_i \in I\!K \,/\, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

   Si $w \in \mathfrak{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \Rightarrow \exists\, \beta_i \in I\!K \,/\, w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$

   Sumar: $v + w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) v_n$, esta igualdad implica que $v + w$ es un elemento de $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

3. Sea α un escalar y v un vector de $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Debo probar que $\alpha \cdot v$ es un elemento de $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

   Veamos:

   Si $v \in \mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow \exists\, \beta_i \in I\!K \,/\, v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$

   Multiplicar por α : $\alpha v = (\alpha\,\beta_1)\, v_1 + (\alpha\,\beta_2)\, v_2 + \ldots + (\alpha\,\beta_n)\, v_n$; esta igualdad implica que αv pertenece a $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

4. Por 1, 2 y 3, afirmamos que $\mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subespacio de V.

TEOREMA 4 Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ $n+1$ vectores pertenecientes a un espacio vectorial V. Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generan V entonces $v_1, v_2, \ldots v_n, v_{n+1}$ también generan V.

Es decir la adición de uno (o más) vectores a un conjunto generador da por resultado otro conjunto generador.

EJEMPLO 11 Hallar el espacio generado por los vectores $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (1,0,1)$.

Solución:

1) Por definición de espacio generado se tiene:

$$\mathfrak{L}\{(1,1,0), (1,0,1)\} = \{v \in I\!R^3 \,/\, v = \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (1,0,1)\}$$

El problema consiste en hallar los escalares α_1 y α_2 en términos de x, y, z que son las componentes de $v = (x,y,z)$.

Veamos:

$$v = (x,y,z) = \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (1,0,1)$$
$$(x,y,z) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ y = \alpha_1 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ z = \alpha_2 & \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Sustituir (2) y (3) en (1): $x = y + z$

$$x - y - z = 0$$

2) El espacio generado por u_1 y u_2 es: $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x - y - z = 0\}$ que viene a ser un plano en $I\!R^3$ que pasa por el origen.

EJEMPLO 12 Demostrar que los vectores $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (1,0,1)$ generan el mismo subespacio de $I\!R^3$ que los vectores $v_1 = (3,2,1)$ y $v_2 = (1,-1,2)$.

Solución:

En primer lugar, hallemos el subespacio generado por u_1 y u_2 y en segundo lugar, hallemos el subespacio generado por v_1 y v_2.

Veamos:

1) En el ejemplo 11, se ha obtenido el subespacio generado por u_1 y u_2, que es $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x - y - z = 0\}$

2) Hallemos el subespacio generado por v_1 y v_2.

Por definición de espacio generado tenemos: $\mathfrak{L}\{v_1, v_2\} = \{v \in I\!R^3 \,/\, v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\}$

En la ecuación: $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, hallemos β_1 y β_2 en términos de x, y, z que son componentes de $v = (x,y,z)$.

Sea: $v = (x,y,z) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$

$$(x,y,z) = \beta_1 (3,2,1) + \beta_2 (1,-1,2)$$
$$= (3\beta_1 + \beta_2, 2\beta_1 - \beta_1, \beta_1 + 2\beta_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\beta_1 + \beta_2 \\ y = 2\beta_1 - \beta_2 \\ z = \beta_1 + 2\beta_2 \end{cases}$$

hay 2 incógnitas y 3 ecuaciones. Las incógnitas son β_1 y β_2.
Una forma sencilla de resolver el sistema de ecuaciones es la forma escalonada:

$$\begin{array}{rl} & \beta_1 + 2\beta_2 = z \\ (-2) \to & 2\beta_1 - \beta_2 = y \\ (-3) \to & 3\beta_1 + \beta_2 = x \\ \hline & \beta_1 + 2\beta_2 = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ & 0 - 5\beta_2 = y - 2z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ & 0 - 5\beta_2 = x - 3z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{array}$$

De (2) y (3) despejar β_2 e igualar:

$$\beta_2 = \frac{y-2z}{-5}$$
$$\beta_2 = \frac{x-3z}{-5}$$
$$\frac{y-2z}{-5} = \frac{x-3z}{-5}$$
$$y - 2z = x - 3z$$
$$\boxed{0 = x - y - z}$$

Luego, el subespacio generado por v_1 y v_2 es: $T = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x - y - z = 0\}$

Como notamos $W = T$, lo cual prueba que $\{u_1, u_2\}$ y $\{v_1, v_2\}$ generan el mismo subespacio.

3.4 INDEPENDENCIA LINEAL

Definición 10. **DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL**

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ un subconjunto de vectores distintos de un espacio vectorial V.

Diremos que el conjunto S es **LINEALMENTE DEPENDIENTES** ($\ell.d.$) si existen n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, no todos cero, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n = \underset{\uparrow\ \text{vector nulo}}{0}$$

Un conjunto S que no es linealmente dependiente se define **linealmente independiente.**

Dicho de otra manera:

$S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE** ($\ell.i.$) si la ecuación $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{O}$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Si S tiene sólo un número finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se dice, a veces, que $v_1, \ldots, v_n$ son dependientes (o independientes), en vez de decir que S es dependiente (o independiente).

EJEMPLO 13 Dado los vectores $v_1 = (3,-8)$ y $v_2 = (-2,3)$ dos vectores de $I\!R^2$, ¿Son los vectores v_1 y v_2 $\ell.i$ o $\ell.d$?

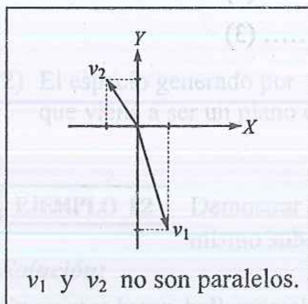
Solución:

Sean los escalares α_1 y α_2, tales que:

$$\alpha_1(3, -8) + \alpha_2(-2, 3) = (0, 0)$$
$$(3\alpha_1 - 2\alpha_2, -8\alpha_1 + 3\alpha_2) = (0,0)$$
$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -8\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$

Afirmamos que los vectores v_1, v_2 son $\ell.i.$



v_1 y v_2 no son paralelos.

3.4.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

1) En el espacio vectorial euclideano $V = I\!R^2$, dos vectores v_1 y v_2 en $I\!R^2$ son $\ell.d.$ si, y sólo si, son paralelos. Si v_1 y v_2 son linealmente independientes, entonces v_1 y v_2 no son paralelos.

EJEMPLO 14

1) $v_1 = (1,-2)$ y $v_2 = (2,-4)$ son linealmente dependientes porque $v_2 = 2v_1$, lo cual implica que v_2 es paralelo a v_1.

2) En $I\!R^3$: tres vectores en $I\!R^3$ son $\ell.d.$ si, y sólo si, son coplanares (están en el mismo plano).

EJEMPLO 15

a) Los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ y $v_3 = (2,-1,5)$ son coplanares, por lo tanto son $\ell.d.$ Se cumple: $v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = 0$.

b) Los vectores $v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,2,3)$ son no coplanares por lo tanto son $\ell.i.$ Se cumple: $v_1 \cdot (v_2 \times v_3) \neq 0$.

4. BASES Y DIMENSIÓN

Definición 11. **BASE**

Sea V un $I\!K$-espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto de V.

Diremos que el conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **BASE** del espacio vectorial V, si:

1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente
2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V. Esto es $V = \mathfrak{L}\{v_1, \ldots, v_n\}$

El espacio V es de dimensión finita si tiene una base finita.

EJEMPLO 16 Si: $V = I\!R^2$

Una base de $I\!R^2$ es $\{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0, 1)$ llamada **base canónica de $I\!R^2$.**

EJEMPLO 17 Si: $V = I\!R^3$

Una base de $I\!R^3$ es $\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, llamada **base canónica de $I\!R^3$**

En general si $V = I\!R^n$, la base canónica de $I\!R^n$ es el conjunto $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$, donde $e_1 = (1,0,0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0,1,0,0, \ldots, 0)$, .. , $e_n = (0,0, \ldots, 0,1)$.

EJEMPLO 18

Dado $W = \{(x,y,z,w) \in I\!R^4 \,/\, z + w = x + y\}$ hallar una base de W.

Solución:

1) En primer lugar, de la ecuación $z + w = x + y$ despejar una de las variables, por ejemplo $w : w = x + y - z$.

2) En segundo lugar, reemplazar w en el vector (x,y,z,w) :
$(x, y, z, w) = (x, y, z, x + y - z)$

3) Descomponer: $= x\,(1,0,0,1) + y\,(0,1,0,1) + z\,(0,0,1,-1)$

Forman una base

4) Luego, el conjunto de vectores $\{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,-1)\}$ es una base de W.

TEOREMA 5 Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $v \in V$, entonces existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n .$$

Dicho de otra forma: Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces todo vector $v \in V$ se puede expresar de una única forma como combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Prueba

La unicidad de los escalares α_i se prueba suponiendo que existen otros escalares β_i y probar que $\beta_i = \alpha_i$, $\forall i$.

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, por tanto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V y son $\ell.i.$
Luego, si $v \in V \Rightarrow \exists\, \alpha_i \in I\!K / v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

2) Supongamos que existen otros escalares β_i, tal que:
$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots\ldots + \beta_n v_n$$

3) Restar : $v - v = (\alpha_1 - \beta_1)\,v_1 + \ldots\ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,v_n$
$0 = (\alpha_1 - \beta_1)\,v_1 + \ldots\ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,v_n$

4) Pero los v_i son $\ell.i$ entonces $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ... , $\alpha_n - \beta_n = 0$
$\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, ... , $\beta_n = \alpha_n$

TEOREMA 6 Si $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ y $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ son dos bases del espacio vectorial V, de dimensión finita, entones $n = m$.

Este teorema nos dice que dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V de dimensión finita contienen el mismo número de vectores.

Demostración:

La demostración es por el método de reducción al absurdo.

$\underbrace{S_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } S_2 = \{u_1, \ldots, u_m\} \text{ son dos bases de } V}_{\text{HIPÓTESIS}} \Rightarrow \underbrace{n = m}_{\text{TESIS}}$

Considerando: P_1 : S_1 es una base de V
P_2 : S_2 es una base de V
q : $n = m$

Demostración por el método directo es: $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$

Demostración por el método del absurdo es: $\underbrace{\sim q \wedge p_2}_{\text{HIPÓTESIS}} \Rightarrow \underbrace{\sim p_1}_{\text{TESIS}}$

Las hipótesis son: $\sim q : n \neq m \iff n > m \vee m > n$.

$p_2 : S_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es una base de V.

Como $p_1 \equiv r_1 \wedge r_2 \begin{cases} r_1 : S_1 \text{ genera } V \\ r_2 : S \text{ es } \ell.i. \end{cases}$

Debo probar que $\boxed{\sim q \wedge p_2 \text{ implica } \sim p_1}$ .... (1)

El enunciado de (1) es:
Si $n > m \wedge S_2 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de V, entonces $S_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores $\ell.d.$ (linealmente dependiente)

Si pruebo que $S_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente, el teorema queda demostrado.

Veamos:
Empecemos:

1) Cada vector v_i de S_1 es combinación lineal de $S_2 = \{u_1, \ldots, u_m\}$, así:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m} u_m \\ v_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m} u_m \\ &\vdots \\ v_n &= a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nm} u_m \end{aligned}$$

2) Para afirmar que $S_1 = \{v_1 , \ldots\ldots , v_n\}$ es $\ell.d.$ debo hallar escalares $c_1 , c_2 , \ldots\ldots , c_n$, no todos cero, tal que:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots\ldots + c_n v_n = 0$ .... (2*)

3) Sustituir 1) en (2*):

$c_1 (a_{11}u_1 + \ldots + a_{1m}\, u_m) + c_2 (a_{21}\, u_1 + \ldots + a_{2m}\, u_m) + \ldots + c_n (a_{n1}\, u_1 + \ldots + a_{nm}\, u_m) = 0$

$(a_{11}\, c_1 + a_{21}\, c_2 + \ldots + a_{n1} c_n)\, u_1 + (a_{12}\, c_1 + \ldots + a_{n2} c_n)\, u_2 + \ldots + (a_{1n}\, c_1 + \ldots + a_{mn}\, c_n)\, u_m = 0$

Como $\{u_1 , u_2 , \ldots , u_m\}$ son $\ell.i.$, entonces:

4) $$\begin{cases} a_{11}\ c_1 + a_{21}\ c_2 + \cdots\cdots + a_{n1}\ c_n = 0 \\ a_{12}\ c_1 + a_{22}\ c_2 + \cdots\cdots + a_{n2}\ c_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\ c_1 + a_{2n}\ c_2 + \cdots\cdots + a_{mn}\ c_n = 0 \end{cases}$$

Las incógnitas son: $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$.

El sistema (4) es un sistema de ecuaciones homogéneas de m ecuaciones con n incógnitas $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$.

5) Como $n > m$ (el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones), el sistema (4) tendrá infinitas soluciones siempre que el sistema sea compatible.

Por tanto, existen escalares $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$, no todos cero, que satisface (2*).

Esto es, S_1 no es $\ell.i.$ y en consecuencia S_1 no es una base de $V(\sim p_1)$. Esta contradicción surgió, porque hemos partido de negar q. Debe ser entonces que $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$. ■

Definición 12. **DIMENSIÓN**

a) si el espacio vectorial es $V = \{0\}$, entonces $\dim V = 0$

b) si el espacio vectorial V tiene una base finita y tiene n vectores, entonces $\dim V = n$. En este caso se dice que V es un espacio vectorial de dimensión finita.

c) si V está generado por una base infinita, entonces $\dim V = \infty$. En este caso diremos que V es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Ejemplos.

(1) $\dim I\!R^2 = 2$

(2) $\dim I\!R^3 = 3$

(3) $\dim I\!R^n = n$

(4) $\dim M_{mn} = mn$, M_{mn} es el espacio vectorial de las matrices de m filas por n columnas.

(5) $\dim_Q I\!R = \infty$, cuando $I\!R$ es un espacio vectorial sobre Q .

(6) Sea $V = P_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales.

Una base de P_n es $\{1 , x , x^2 , \ldots , x^n\}$, por lo tanto $\dim P_n = n + 1$

(7) Halle una base en $I\!R^3$ para el conjunto de vectores que están en el plano $2x - y - z = 0$

Solución:

Según el problema, se tiene el subespacio $W = \{(x , y , z) \in I\!R^3 \,/\, 2x - y - z = 0\}$.

Hallemos una base de W:

1º Despejar z de $2x - y - z = 0$: $z = 2x - y$

2º Sustituir $z = 2x - y$ en (x , y , z) , así obtendremos:

$(x , y , z) = (x , y , 2x - y)$

$= x\,(1 , 0 , 2) + y\,(0 , 1 , -1)$

3º Una base de W es $\{(1,0,2) , (0,1,-1)\}$

4º Como la base tiene 2 vectores, afirmamos que: $\dim W = 2$.

(8) Demostrar que los únicos subespacios propios de $I\!R^2$ son los conjuntos de vectores localizados en una recta que pasen por el origen.

Demostración:

Se sabe que $\dim I\!R^2 = 2$

Sea H un subespacio propio de $I\!R^2$.

Cualquier subespacio propio de $I\!R^2$ debe ser de dimensión 1.

Sea $\{(x_0 , y_0)\}$ una base de H.

Cualquier vector $v = (x,y) \in H$ es combinación lineal del vector (x_0 , y_0). Esto es, para todo $t \in I\!R$ se cumple: $(x,y) = t\,(x_0 , y_0)$, $t \in I\!R$

└── Es la ecuación vectorial de una recta que pasa por (0,0) y cuyo vector dirección es (x_0 , y_0).

La ecuación cartesiana de la recta es $\boxed{y = \frac{y_0}{x_0} x}$ cuya pendiente es $m = \frac{y_0}{x_0}$, $x_o \neq 0$

⑨ Los únicos subespacios propios de $I\!R^3$ son:

a) $W = \{P = (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, P = t\,\vec{a}\ ,\ t \in I\!R\}$ ←—— Conjunto de vectores localizados en una recta que pasa por (0,0,0)

b) $U = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, Ax + By + Cz = 0\}$ ←—— Conjunto de vectores localizados en un plano que pasa por (0,0,0)

TEOREMA 7 Supóngase que $dim\ V = n$. Si $u_1, u_2, \ldots, u_m$ es un conjunto de m vectores linealmente independiente en V, entonces $m \le n$.

Demostración:

Demostraremos por el método de reducción al absurdo.

Sean: $P_1 : dim\ V = n$

$P_2 : u_1, u_2, \ldots, u_m$ es un conjunto de m vectores $\ell.i.$ en V.

$q : m \le n$

$$[(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow q] \equiv \underbrace{[(\sim q \wedge P_1) \Rightarrow \sim P_2]}_{\text{Método del absurdo}}$$

Debo probar que: $\underbrace{n > m}_{\sim q} \wedge \underbrace{dim\ V = n}_{P_1}$ implica $\underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_m \text{ son } \ell.d.}_{\sim P_2}$

1. Si $m > n$ entonces pueden hallarse constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, que satisfagan la ecuación:

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots\ldots + c_m u_m = \mathbf{0}$ ... según el Teo. 6

2. Esta igualdad implica que $u_1, u_2, \ldots, u_m$ son $\ell.d.$ *lqqd.*

NOTA:
Este teorema nos dice que: la base de un espacio vectorial tiene el máximo número de vectores $\ell.i.$ Esto es, si la base de un espacio vectorial tiene n vectores, entonces n es el máximo número de vector $\ell.i.$

TEOREMA 8 Sea W un subespacio del espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces W es de dimensión finita y $dim\ W \le dim\ V$.

Demostración:

Las HIPÓTESIS son:

P_1 : W es subespacio de V

P_2 : $dim\ V = n$

TESIS:

q : $dim\ W \le dim\ V$

Prueba:

1. Por hipótesis tenemos: $dim\ V = n$.
2. Si W es subespacio de V, entonces todo conjunto de vectores $\ell.i.$ en W, también es $\ell.i.$ en V.
3. Por el Teorema 7 cualquier conjunto de vectores $\ell.i.$ en W tendrá a lo más n vectores, es decir: N° de vectores $\ell.i.$ de $W \le n$ = máximo número de vectores $\ell.i.$ en $V = dim\ V$
Esto implica que $dim\ W$ es finita.
4. Además, cualquier base de W es un conjunto de vectores linealmente independiente, en consecuencia $dim\ W \le dim\ V$.

Lqqd.

CONSECUENCIAS:

1. Si W es un subespacio del *e.v.* V y V es de dimensión finita, entonces W es de dimensión finita y $dim\ W \le dim\ V$.
2. Todo espacio vectorial que contenga un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.
3. Los únicos subespacios propios de $I\!R^3$ son los conjuntos de vectores localizados en una recta o en un plano que pasen por el origen.

TEOREMA 9 Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V y $dim\ V = n$, entonces: $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es una base de V.

Prueba:

Por hipótesis, se tiene: P_1: $v_1, \ldots, v_n$ son $\ell.i.$

P_2: $dim\ V = n$

TESIS: $q : \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $V \iff \begin{cases} q_1 : v_1, \ldots, v_n \text{ son } \ell.i. \text{ (hip)} \\ q_2 : v_1, \ldots, v_n \text{ generan } V \end{cases}$

① Las hipótesis $\begin{cases} P_1 : \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son } \ell.i. \\ P_2 : dim\ V = n \end{cases}$

implican que el máximo número de vectores en V es n.
Bastará probar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V.

② Dado $u \in V$, tal que $u \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$, se tiene que el conjunto de los $n+1$ vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, u\}$ son $\ell.d.$, luego existen escalares $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$ y λ, no todos nulos, tal que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n + \lambda u = \mathbf{0} \ \ \ldots\ldots\ (2*)$$

③ En esta ecuación $\lambda \neq 0$, de lo contrario $\{v_1, \ldots\ldots, v_n, u\}$ serían $\ell.\dot{\iota}.$ y tendríamos que $n+1 > n = dim\ V$, lo cual contradice a la hipótesis. Esto nos dice que $n =$ máximo número de vectores $\ell.\dot{\iota}.$

④ De la ecuación (2*) despejamos u, ya que $\lambda \neq 0$:

$$u = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n$$

Esta ecuación nos dice que u es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\ \forall\ u \in V$, lo cual implica que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V.

5. SUMAS Y SUMAS DIRECTAS

5.1 DEFINICIONES

Definición 13.

Sea V un $I\!K$–espacio vectorial.

Sean U y W subespacios de V.

Se define la suma de U y W del siguiente modo: $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$

Por tanto: $v \in (U+W) \Longleftrightarrow v = u + w$, tal que $u \in U \wedge w \in W$.

Definición 14.

Se dice que V es una **suma directa** de U y W si $\forall\ v \in V$, existen únicos $u \in U$ y $w \in W$ tal que $v = u + v$.

5.2 TEOREMAS

TEOREMA 10 Sea V un $I\!K$ – espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Si $U + W = V$ y si $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, entonces V es la suma directa de U y W.

Notación: $U \oplus W = V$ denota la suma directa de U y W.

Demostración:

Por demostrar: la unicidad de u y w, $u \in U \wedge w \in W$ siempre que $(u + w) \in (U + W)$. Es decir, al suponer que existen $u' \in U \wedge w' \in W$ con $(u' + w') \in (U + W)$, debo probar que $u' = u \wedge w' = w$.

Veamos:

HIPÓTESIS $\begin{cases} P_1: V = U + W \\ P_2: U \cap W = \{\mathbf{0}\} \end{cases}$ TESIS $\{ q: V = U \oplus W$

① Sea $v \in V = U + W \Rightarrow \exists\, u \in U,\ w \in W \,/\, v = u + w$ .... según P_1

② Supongamos que existen elementos $u' \in U \wedge w' \in W$ tales que $v = u' + w'$

③ Entonces: $u + w = u' + w'$ .... por 1 y 2.

$\Longleftrightarrow u - u' = w' - w$

Pero $(u - u') \in U \wedge (w' - w) \in W \Rightarrow (u - u') \in U \cap W \wedge (w' - w) \in U \cap W$.

④ Según P_2: $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, entonces:

$(u - u') \in U \cap W$ implica $u - u' = 0 \Rightarrow u = u'$

$\wedge\ (w - w') \in U \cap W$ implica $w - w' = 0 \Rightarrow w = w'$

lqqd.

5.3 DIMENSIÓN DE LA SUMA DE DOS SUBESPACIOS

TEOREMA 11 Si U y W son dos subespacios de V y la dimensión de V es finita, entonces $dim\,(U + W) = dim\ U + dim\ W - dim\ (U \cap W)$.

Prueba:

① Sean $dim\ V = n$, $dim\ U = r$, $dim\ W = s$

$dim\,(U \cap W) = p$, $dim\,(U + W) = q$

Debo probar que $q = r + s - p$

② Consideremos $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$ y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ una base de $U \cap W$.

③ Teniendo en cuenta que $U \cap W$ es un subespacio de U y de W, extendemos la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ a una base de U y W respectivamente.

Sean: $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, x_1, x_2, \ldots, x_{r-p}\}$ una base de U

y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, z_1, z_2, \ldots, z_{s-p}\}$ una base de W

④ El conjunto $C = A \cup B = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, x_1, \ldots, x_{r-p}, z_1, \ldots, z_{s-p}\}$ es una base de $U + W$, porque C es un conjunto generador de $U + W$ y son $\ell.\dot{\iota}.$

Probemos:

01 Para afirmar que C es un conjunto generador de $U+W$, debo probar que cualquier vector $v \in (U+W)$ es combinación lineal de los vectores:
$\{v_1, \dots, v_p, x_1, \dots, x_{r-p}, z_1, \dots, z_{s-p}\}$

Veamos:

$v \in (U+W)$ implica $v = u + w$, tal que $u \in U \wedge w \in W$

Como $u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i$ porque A es base de U.

Como $w \in W \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i v_i + \sum_{i=1}^{s-p} \beta'_i z_i$ porque B es base de W.

Luego:
$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i}_{u} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha'_i v_i + \sum_{i=1}^{s-p} \beta'_i z_i}_{w}$$

$$v = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \alpha'_i) v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{s-p} \beta'_i z_i$$

Esta igualdad nos indica que v es combinación lineal de los vectores $\{v_1, \dots, v_p, x_1, \dots, x_{r-p}, z_1, \dots, z_{s-p}\}$.

02 C es un conjunto de vectores $\ell.i.$

Debo probar que: $\sum^{p} \alpha_i v_i + \sum^{r-p} \beta_i x_i + \sum^{s-p} \gamma_i z_i = 0$ implica $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$

Veamos:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i = -\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i \right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \ (5)$$

Pero: $\sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i \in U$, porque $\left(\sum_{i=r}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{r-p} \beta_i x_i \right) \in U$

Además: $\sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i \in W$

Por tanto: $\sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i \in (U \cap W)$

En consecuencia: $\sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i v_i$, porque $\{v_1, \dots, v_p\}$ es base de $U \cap W$ o sea

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i v_i - \sum_{i=1}^{s-p} \gamma_i z_i$$

Porque $\{v_1, \dots, v_p, z_1, \dots, z_{s-p}\}$ es una base de W, es que son $\ell.i.$ e implica
$\alpha'_i = 0$, $\gamma_i = 0$ .... (6)

Porque en (5) $\{v_1, \dots, v_p, x_1, \dots, x_{r-p}\}$ es una base de U son $\ell.i.$, lo cual implica que
$\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$ .... (7)

Por (7) y (6) afirmamos que los vectores $\{v_1, \dots, v_p, x_1, \dots, x_{r-p}, z_1, \dots, z_{s-p}\}$ son $\ell.i.$

(8) Como $C = \{v_1, \dots, v_p, x_1, \dots, x_{r-p}, z_1, \dots, z_{s-p}\}$ es una base de $U+W$, se cumple que:

$$\begin{aligned} dim\,(U+W) &= p + r - p + s - p \\ &= r + s - p \\ &= dim\,U + dim\,W - dim\,U \cap W \end{aligned}$$

COROLARIO

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $I\!K$ y si es la suma directa de los subespacios U y W ($V = U \oplus W$), entonces $dim\,(U \oplus W) = dim\,U + dim\,W$.

Prueba:

1) Sea $\{u_1, \dots, u_r\}$ una base de U
y $\{w_1, \dots, w_s\}$ una base de W

2) Todo elemento $u \in U$ tiene una expresión única como combinación lineal:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r, \quad \alpha_i \in I\!K$$

3) Todo elemento $w \in W$ tiene una expresión única como combinación lineal:

$$w = \beta_1 W_1 + \ldots + \beta_s W_s \quad , \quad \beta_i \in I\!K$$

4) Todo vector $v \in (U \oplus W)$ tiene una expresión única de la forma:

$$v = u + w \quad , \quad u \in U \ , \ w \in W$$
$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s$$

Esta igualdad prueba que $\{u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s\}$ es una base de $V = U \oplus W$.

En consecuencia: $\dim(V) = r + s = \dim U + \dim W$

OBSERVACIONES:

1. Sean $W_1, \ldots, W_r$ subespacios de V. Se dice que V es la suma directa de $W_1, \ldots, W_r$ si todo elemento $v \in V$ se puede expresar de manera única como una suma $v = w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_r$, con $w_i \in W_i$, $\forall i$.

Notación: $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots \oplus W_r$

$$v \in V \iff \exists!\, w_i \in W_i \,/\, v = w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_r$$

2. Sean U y W dos espacios vectoriales arbitrarios sobre el campo $I\!K$.

Definimos $U \times W = \{(u,w) \,/\, u \in U \wedge w \in W\}$

Se cumplen:

a) $U \times W$ es un espacio vectorial sobre $I\!K$, llamado **PRODUCTO DIRECTO** de U y W.

b) $\dim(U \times W) = \dim U + \dim W$.

TEOREMA 12 W un subespacio de V, donde $\dim V = n$

Entonces $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$

5.4 PROBLEMAS: INDEPENDENCIA LINEAL, GENERADORES Y BASES

PROBLEMA 01 Sea $V = I\!R^3$ y sea W el subespacio generado por $(1,0,0)$ y sea U el subespacio generado por $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$. Demostrar que V es la suma directa de W y U.

Prueba:

Se tiene que $W = \mathfrak{L}\{(1,0,0)\}$ y $U = \mathfrak{L}\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

Para afirmar que V es la suma directa de W y U bastará probar que $W \cap U = \{(0,0,0)\}$

Veamos:

1 Sea $v \in (W \cap U) \Rightarrow v \in W \wedge v \in U$

2 Si $v \in W \Rightarrow v = \alpha(1,0,0)$

Si $v \in U \Rightarrow v = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(0,1,1)$

Debe cumplirse que: $\alpha = 0 \vee (\beta_1 = 0 \wedge \beta_2 = 0)$

3 De (2) obtenemos $v = v$

$$\alpha(1,0,0) = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(0,1,1)$$
$$(\alpha,0,0) = (\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \beta_2)$$
$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Al resolver, obtenemos $\begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

Luego: $v = 0(1,0,0)$
$v = (0,0,0)$

Lo cual implica que $W \cap U = \{(0,0,0)\}$

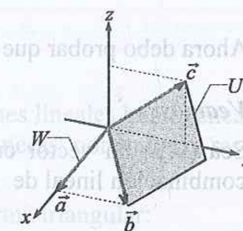
Por tanto: $V = W \oplus U$
$V = \mathfrak{L}\{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$

Además $\dim V = \dim W + \dim U = 1 + 2 = 3$

Geométricamente:

W es una recta que pasa por $(0,0,0)$ y su vector dirección es $\vec{a} = (1,0,0)$.

U es un plano generado por los vectores $b = (1,1,0)$ y $\vec{c} = (0,1,1)$ y pasa por $(0,0,0)$.



Uniendo los generadores de W con los generadores de U obtenemos un nuevo generador para $I\!R^3$, esto es:

$$I\!R^3 = W \oplus U$$
$$I\!R^3 = L\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$$

PROBLEMA 02 Sea $V = I\!R^2$ un espacio vectorial sobre $I\!K = I\!R$. Sea $u = (a,b)$ y $v = (c,d)$ vectores de V, tal que $ad - bc \neq 0$. Probar que u y v constituyen una base de V.

Demostración:

Debo probar 2 afirmaciones:

① Que los vectores u y v son $\ell.i.$

Debo probar que $\alpha u + \beta v = (0,0)$ implica $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Veamos:

Supongamos que $\alpha(a,b) + \beta(c,d) = (0,0)$

$$(\alpha a + \beta c,\ \alpha b + \beta d) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha b + \beta d = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Aquí se tiene un sistema lineal homogéneo con dos incógnitas.

El determinante de los coeficientes, que es, $|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ es diferente de cero.

Por tanto afirmamos que la única solución es la trivial, esto es: $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Lo cual implica que μ y v son $\ell.i.$

② Ahora debo probar que los vectores u y v generan a $I\!R^2$

Veamos:

Sea (x,y) un vector cualquiera de $V = I\!R^2$, debo probar que el vector (x,y) sea una combinación lineal de u y v.

Es decir: $(x,y) = mu + nv$, $m \in I\!R$, $n \in I\!R$

$$= m(a,b) + n(c,d)$$

donde los escalares "m" y "n" son únicos y deben estar expresados en función de "x" e "y".

$$(x,y) = (ma + nc,\ mb + nd)$$

$$\begin{cases} m\,a + n\,c = x & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ m\,b + n\,d = y & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -b \to \\ a \to \end{matrix} \begin{cases} m\,a + nc = x \\ m\,b + nd = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mab - nbc = -bx \\ mab + nad = ay \end{cases}$$

$$n(ad - bc) = ay - bx$$

$$\boxed{n = \frac{ay - bx}{ad - bc}} ,\ ad - bc \neq 0$$

$$\begin{matrix} d \to \\ -c \to \end{matrix} \begin{cases} ma + nc = x \\ mb + nd = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} mad + ncd = dx \\ -mbc - ncd = -cy \end{cases}$$

$$m(ad - bc) = dx - cy$$

$$\boxed{m = \frac{dx - cy}{ad - bc}} ,\ ad - bc \neq 0$$

PROBLEMA 03 Sea $V = I\!R^3$ un espacio vectorial sobre $I\!K = I\!R$, probar que $\vec{u} = (1,3,5)$, $\vec{v} = (2,-2,3)$, $\vec{w} = (3,2,-5)$ forma una base de $I\!R^3$.

Prueba:

Debo probar dos afirmaciones:
1) Que: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son $\ell.i.$
2) Que: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generan a $I\!R^3$.

Veamos:

① Supongamos $\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = (0,0,0)$, debo probar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Pero: $\alpha_1(1,3,5) + \alpha_2(2,-2,3) + \alpha_3(3,2,-5) = (0,0,0)$ implica:

$$(\text{I}) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 5\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

El conjunto de ecuaciones en (I) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Se puede resolver de varias maneras: por sumas y restas, por determinantes o por matrices.

Resolveré por suma y restas, reduciendo el sistema a la forma triangular:

-5 , -3 , $+$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 5\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$-\frac{7}{8}$, $+$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 0 - 8\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 0 - 7\alpha_2 - 20\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 0 - 8\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 0 + 0 - \frac{111}{8}\alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De (3): $\alpha_3 = 0$

De (2): $\alpha_2 = 0$

De (1): $\alpha_1 = 0$

Otra forma: Si probamos que $det(A) \neq 0$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

② Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generan a $I\!R^3$, entonces cualquier vector $(x,y,z) \in I\!R^3$ es combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Es decir: $(x, y, z) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$$= a(1,3,5) + b(2,-2,3) + c(3,2,-5)$$

$$= (a + 2b + 3c,\ 3a - 2b + 2c,\ 5a + 3b - 5c)$$

(-5) (-3)

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x & \dots\dots\dots\dots (1) \\ 3a - 2b + 2c = y & \dots\dots\dots\dots (2) \\ 5a + 3b - 5c = z & \dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Hallaremos los escalares a, b y c en función de x, y, z.

$-\frac{7}{8}$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x & \dots\dots\dots\dots (1) \\ 0 - 8b - 7c = -3x + y & \dots\dots\dots (2) \\ 0 - 7b - 20c = -5x + z & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Quedando fijo (2):

Multiplicar (2) por $-\frac{7}{8}$ y sumar con (3).

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x & \dots\dots\dots\dots (1) \\ 0 - 8b - 7c = -3x + y & \dots\dots\dots (2) \\ 0 \quad 0 - \frac{111}{8}c = \frac{21}{8}x - \frac{7}{8}y - 5x + z & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x & \dots\dots\dots\dots (1) \\ 0 - 8b - 7c = -3x + y & \dots\dots\dots (2) \\ 0 + 0 + 111c = 19x + 7y - 8z & \dots\dots (3) \end{cases}$$

De (3) obtenemos: $c = \frac{1}{111}(19x + 7y - 8z)$

De (2) $b = \frac{1}{111}(25x - 20y + 7z)$

De (1) $a = \frac{1}{111}(4x + 19y + 10z)$

PROBLEMA 04 Sea $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V(I\!R) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ probar que los vectores $(2,0,0,-2)$, $(2,0,-2,0)$ y $(8,-2,-4,-2)$ forman una base de W.

Demostración:

Para que dichos vectores formen una base, debe cumplir dos condiciones:

① Que los vectores $\vec{u} = (2,0,0,-2)$, $\vec{v} = (2,0,-2,0)$ y $\vec{w} = (8,-2,-4,-2)$ son $\ell.i.$

Veamos:

Sea $\alpha_1(2,0,0,-2) + \alpha_2(2,0,-2,0) + \alpha_3(8,-2,-4,-2) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 & \dots\dots\dots (1) \\ \quad - 2\alpha_3 = 0 & \dots\dots\dots (2) \\ -2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 & \dots\dots\dots (3) \\ -2\alpha_1 \quad - 2\alpha_3 = 0 & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

De (2) : $\alpha_3 = 0$

De (3) : $\alpha_2 = 0$

De (4) : $\alpha_1 = 0$

② Ahora, debo probar que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generan a W.

Veamos:

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vector cualquiera de V_4 $(I\!R)$, debo probar que el vector $\vec{x}$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$, y $\vec{w}$; sea:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \beta_1(2,0,0,-2) + \beta_2(2,0,-2,0) + \beta_3(8,-2,-4,-2)$

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 2\beta_2 + 8\beta_3 = x_1 \\ \quad - 2\beta_3 = x_2 \\ -2\beta_2 - 4\beta_3 = x_3 \\ -2\beta_1 \quad - 2\beta_3 = x_4 \end{cases}$$

Ordenar las 4 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 2\beta_2 + 8\beta_3 = x_1 & \dots\dots\dots (1) \\ -2\beta_1 + 0 - 2\beta_3 = x_4 & \dots\dots\dots (2) \\ 0 - 2\beta_2 - 4\beta_3 = x_3 & \dots\dots\dots (3) \\ 0 + 0 - 2\beta_3 = x_2 & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

De (4): $\beta_3 = \frac{1}{2}x_2$

En (3): $-2\beta_2 - 4\left(-\frac{1}{2}x_2\right) = x_3$

$-2\beta_2 + 2x_2 = x_3$

$\beta_2 = \frac{1}{2}(2x_2 - x_3)$

En (2): $-2\beta_1 - 2\left(-\frac{1}{2}x_2\right) = x_4$

$-2\beta_1 + x_2 = x_4$

$\beta_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_4)$

Sustituir en (1): $2\frac{1}{2}(x_2 - x_4) + 2\cdot\frac{1}{2}(2x_2 - x_3) + 8\left[-\frac{1}{2}x_2\right] = x_1$

$x_2 - x_4 + 2x_2 - x_3 - 4x_2 = x_1$

$-x_2 - x_3 - x_4 = x_1$

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$ Esta igualdad cumple la condición definida en W.

Por tanto, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forman una base de W.

PROBLEMA 05 Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores de $I\!R^3$:

$A = \{(1,0,-1), (0,-2,1)\}$
$B = \{(1,-2,0), (2,-2,-1)\}$

generan el mismo subespacio.

Obtener una base y la dimensión de dicho subespacio.

Solución:

a) Si el conjunto A genera un subespacio W, entonces cualquier vector $(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3$ es combinación lineal de los vectores $(1,0,-1)$ y $(0,-2,1)$.

Es decir: $(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(0,-2,1)$
$= (\alpha_1, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2)$

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & (1) \\ -2\alpha_2 = x_2 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2}x_2 & (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = x_3 & (3) \end{cases}$$

Sustituir (1) y (2) en (3): $-x_1 - \frac{1}{2}x_2 = x_3$

$-2x_1 - x_2 = 2x_3 \iff \boxed{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0}$

esta igualdad implica que el conjunto A genera al subespacio

$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

b) Si el conjunto B genera un subespacio, entonces cualquier vector $(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3$ es combinación lineal de los vectores $(1,-2,0)$ y $(2,-2,-1)$.

Es decir: $(x_1, x_2, x_3) = \beta_1(1,-2,0) + \beta_2(2,-2,-1)$
$(x_1, x_2, x_3) = (\beta_1 + 2\beta_2, -2\beta_1 - 2\beta_2, -\beta_2)$

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = x_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -2\beta_1 - 2\beta_2 = x_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -\beta_2 = x_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De (3): $\boxed{\beta_2 = -x_3}$

De (2): $-2\beta_1 - 2(-x_3) = x_2$

$-2\beta_1 + 2x_3 = x_2$

$-x_2 + 2x_3 = 2\beta_1$

$\boxed{\beta_1 = \frac{1}{2}(-x_2 + 2x_3)}$

Sustituir en (1): $\frac{1}{2}(-x_2 + 2x_3) + 2(-x_3) = x_1$

$-x_2 + 2x_3 - 4x_3 = 2x_1$

$-x_2 - 2x_3 = 2x_1$

$\boxed{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0}$

Esta igualdad implica que el conjunto B genera el subespacio:

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R / 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

Como vemos, los resultados obtenidos en a) y b) nos indican que los conjuntos A y B generan el mismo subespacio.

c) Una base de W se obtiene del siguiente modo:

De la ecuación $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, despejar $x_2 = -2x_1 - 2x_3$ y sustituir en (x_1, x_2, x_3), obteniéndose:

$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -2x_1 - 2x_2, x_3)$
$= x_1(1, -2, 0) + x_3(0, -2, 1)$

Una base de W, es $\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$

Luego, $dim\ W = 2$.

PROBLEMA 06 Sea: $V=\{a_0+a_1t+a_2\cos 2t+a_3e^{3t}\ /\ a_i\in \mathbb{R}\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$.

Probar que las funciones: $f_1(t)=2t-1\ ,\quad f_2(t)=t+\cos 2t$

$f_3(t)=3+e^{3t}\ ,\quad f_4(t)=-t+e^{3t}$

constituyen una base de V.

Demostración:

Debo probar dos cosas: 1) Que f_1, f_2, f_3, f_4 son $\ell.i.$ y

2) Que f_1, f_2, f_3, f_4 generan a V.

Veamos:

1 Supongamos que: $\alpha_1(2t-1)+\alpha_2(t+\cos 2t)+\alpha_3(3+e^{3t})+\alpha_4(-t+e^{3t})=0$

$\Rightarrow\ (-\alpha_1+3\alpha_3)+(2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4)\,t+\alpha_2\cos 2t+(\alpha_3+\alpha_4)\,e^{3t}=0$

$$\begin{cases}-\alpha_1 + \alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ (1)\\ 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4=0 & \ldots\ldots\ (2)\\ \alpha_2 = 0 & \ldots\ldots\ (3)\\ \alpha_3+\alpha_4=0 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

De (3): $\alpha_2=0$

Sustituir en (2), obteniéndose:

$$\begin{cases}-\alpha_1 + \alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ (1) & \text{Manteniendo fijo (1):}\\ 2\alpha_1 - \alpha_4 = 0 & \ldots\ldots\ (2) & \text{Multiplicar (1) por } -2 \text{ y sumar a (2)}\\ \alpha_3+\alpha_4=0 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ (1) & \text{Manteniendo fijo (2):}\\ 0-0+2\alpha_3-\alpha_4 = 0 & \ldots\ldots\ (2) & \text{Multiplicar (2) por } -\tfrac{1}{2} \text{ y sumar a (4)}\\ 0+0+\alpha_3+\alpha_4=0 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0 & \ldots\ldots\ (1) & \text{Manteniendo fijo (2):}\\ 0-0+2\alpha_3-\alpha_4 = 0 & \ldots\ldots\ (2) & \text{Multiplicar (2) por } -\tfrac{1}{2} \text{ y sumar a (4)}\\ 0+0+0+\tfrac{3}{2}\alpha_4=0 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

De (4): $\alpha_4=0$, De (2): $\alpha_3=0$, De (1) : $\alpha_1=0$.

Conclusión:

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, por tanto f_1, f_2, f_3, f_4 son $\ell.i.$

2 $\forall\, g(t)\in V$ se tiene que $g(t)$ es combinación lineal de f_1, f_2, f_3, f_4.

Es decir:

$$\underbrace{k_0+k_1t+k_2\cos 2t+k_3e^{3t}}_{g(t)} = a f_1+b f_2+c f_3+d f_4$$
$$= a(2t-1)+b(t+\cos 2t)+c(3+e^{3t})+d(-t+e^{3t})$$
$$= (-a+3c)+(2a+b-d)\,t+b\cos 2t+(c+d)\,e^{3t}.$$

$$\begin{cases}-a + 3c = k_0 & \ldots\ (1)\\ 2a+b-d=k_1 & \ldots\ (2)\\ b = k_2 & \ldots\ (3)\\ c+d=k_3 & \ldots\ (4)\end{cases}$$

El problema consiste en hallar valores únicas de a, b, c y d en términos de k_0, k_1, k_2 y k_3.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

De (3): $\boxed{b=k_2}$

Al sustituir el valor de b en (2) obtenemos:

$$\begin{cases}-a+3c=k_0 & \ldots\ldots\ (1) & \text{Mantener fijo (1).}\\ 2a-d=k_1-k_2 & \ldots\ldots\ (2) & \text{Multiplicar (1) por 2 y sumar a (2).}\\ c+d=k_3 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a\quad 3c=k_0 & \ldots\ldots\ (1) & \text{Siendo fijos (1) y (2).}\\ 0\quad 6c-d=2k_0+k_1-k_2 & \ldots\ldots\ (2) & \text{Sumar (2) a (4):}\\ c+d=k_3 & \ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a+3c=k_0\\ 0+6c-d=2k_0+k_1-k_2\\ 7c=2k_0+k_1-k_2+k_3\end{cases}$$

$\boxed{c=\tfrac{1}{7}(2k_0+k_1-k_2+k_3)}$

$\boxed{d=-\tfrac{1}{7}(2k_0+k_1-k_2-6k_3)}$

$\boxed{a=\tfrac{1}{7}(-k_0+3k_1-3k_2+3k_3)}$

5.5 PROBLEMAS: DIMENSIÓN DE SUBESPACIOS

PROBLEMA 07 Dado los subespacios de $I\!R^3$

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \,/\, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Hallar $dim\,(S_1 + S_2)$

Solución:

Según el Teorema 11 tenemos: $dim\,(S_1 + S_2) = dim\,S_1 + dim\,S_2 - dim\,(S_1\, n\, S_2)$

(1) Cálculo de $dim\,S_1$

De la ecuación $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ en S_1 despejar x_1: $x_1 = 2x_2 - 3x_3$

Luego: $(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - 3x_3, x_2, x_3)$
$= x_2(2,1,0) + x_3(-3,0,1)$

Entonces: $S_1 = \mathfrak{L}\{(2,1,0), (-3,0,1)\}$ y $dim\,S_1 = 2$

(2) Cálculo de $dim\,S_2$

De la ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ en S_2 despejar x_1: $x_1 = x_2 - x_3$

Luego: $(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, x_2, x_3)$
$= x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$

Entonces $S_2 = \mathfrak{L}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ y $dim\,S_2 = 2$

(3) Cálculo de la $dim\,(S_1 \cap S_2)$.

Veamos: $v \in (S_1 \cap S_2) \iff v \in S_1 \;\wedge\; v \in S_2$

<u>Todo lo que interesa, es hallar v</u>

Si $v \in S_1 \Rightarrow v = \alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(-3,0,1)$
$= (2\alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$

Si $v \in S_2 \Rightarrow v = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(-1,0,1)$
$= (\beta_1 - \beta_2, \beta_1, \beta_2)$

Así tendremos: $v = v$

$$(2\alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \beta_2, \beta_1, \beta_2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \;\ldots\ldots\; (1) \\ \alpha_1 = \beta_1 \;\ldots\ldots\; (2) \\ \alpha_2 = \beta_2 \;\ldots\ldots\; (3) \end{cases}$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas.

Todo lo que se necesita es hallar:

i) α_1 en función de α_2 o α_2 en función de α_1
ii) o β_1 en función de β_2 o viceversa.

Veamos: al sustituir (2) y (3) en (1):

$$2\beta_1 - 3\beta_2 = \beta_1 - \beta_2$$
$$\beta_1 - 2\beta_2 = 0$$
$$\beta_1 = 2\beta_2$$

Sustituir en $v = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(-1,0,1)$
$v = 2\beta_2(1,1,0) + \beta_2(-1,0,1)$
$= \beta_2[2(1,1,0) + (-1,0,1)]$
$= \beta_2(1,2,1)$

Luego: $S_1 \cap S_2 = \mathfrak{L}\{(1,2,1)\}$ y $dim(S_1 \cap S_2) = 1$

Por tanto: $dim\,(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1$
$dim\,(S_1 + S_2) = 3$

Otra forma de hallar $S_1 \cap S_2$:

Bastará resolver:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 \\ x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Se obtiene: $x_2 = 2x_3$
$x_1 = x_3$

Luego:

$S_1 \cap S_2 = \{(x_3, 2x_3, x_3)/x_3 \in I\!R\}$
$= \{x_3(1,2,1)/x_3 \in I\!R\}$

Entonces: $dim\,(S_1 \cap S_2) = 1$

PROBLEMA 08 Dados los subespacios en $I\!R^3$

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \,/\, x_1 = x_2 + x_3\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3 \,/\, x_1 + x_2 = -x_3\}$$

¿Se cumple $I\!R^3 = S_1 \oplus S_2$?

Solución:

Para probar que $I\!R^3$ es **LA SUMA DIRECTA** de S_1 y S_2, debo demostrar que:

$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$, $\mathbf{0} = (0,0,0)$ es el vector nulo.

Veamos:

Sea el vector $v = (x_1, x_2, x_3)$ tal que $v \in S_1 \cap S_2$

Si $v \in S_1 \cap S_2 \;\Rightarrow\; v \in S \quad \wedge \quad v \in S_2$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x_1 = x_2 + x_3 \qquad x_1 + x_2 = -x_3$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 \quad = x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \; = -x_3 \end{cases}$$

$$\text{I}\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 \quad \ldots\ldots \; (1) \\ x_1 + x_2 \; = -x_3 \quad \ldots\ldots \; (2) \end{cases}$$

Como hay 2 ecuaciones con 3 incógnitas, resolver el sistema (1) hallando x_1 y x_2 en función de x_3.

Sumar: $\quad 2x_1 + 0 \; = 0$

$x_1 = 0 \quad \ldots\ldots \; (3)$

Sustituir (3) en (1) : $\quad 0 - x_2 = x_3$

$x_2 = -x_3$

Resolver por Gauss- Jordan

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & -1 & 0 \;\; (-1) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \;\leftarrow + \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \;\leftarrow \text{por } 1/2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 \;\leftarrow + \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \;\ldots\ldots\ldots \text{I} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \;\ldots\ldots\ldots \text{II} \end{array}$$

Resultados: $\rho(A) = \rho(A/B) = 2$
$n = 3$, $\rho = 2 \rightarrow 3 - 2 = 1$
Habrá un parámetro.
Haciendo $x_3 = t$ en II
obtenemos : $x_2 = -t$.
De I : $\quad x_1 = 0$
Luego : $\quad X = (0, -t, t)$
$\qquad = t\,(0 , -1 , 1)$

Luego, el conjunto solución es $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

Por tanto, el vector v es: $\quad v = (0 , -x_3 , x_3)$

$v = x_3\,(0 , -1 , 1) \;,\; x_3 \in I\!R.$

Como vemos, el vector v que pertenece a la intersección de S_1 con S_2 no se reduce al vector nulo $(0,0,0)$.

En consecuencia: $I\!R^3$ no es la suma directa de S_1 con S_2. Es decir $I\!R^3 \neq S_1 \oplus S_2$

PROBLEMA 09 Hallar la dimensión de $((S_1 \cap S_2) + (S_3 \cap S_4))$, si

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 2x_2 - 3x_3 = -4x_1\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 2x_1 + 2x_3 = x_2\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + 5x_3 = 4x_2\}$$
$$S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + 3x_2 = 3x_3\}$$

Solución:

Fórmula:

$$dim\,((S_1 \cap S_2) + (S_3 \cap S_4)) = dim\,(S_1 \cap S_2) + dim\,(S_3 \cap S_4) - dim\,((S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4))$$

1) Hallar una base de $S_1 \cap S_2$

Sea $v = (x_1 , x_2 , x_3)$ un vector tal que $v \in (S_1 \cap S_2)$

Si $v \in S_1 \cap S_2 \;\Rightarrow\; v \in S_1 \;\wedge\; v \in S_2$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$2x_2 - 3x_3 = -4x_1 \qquad 2x_1 + 2x_3 = x_2$$

Ahora, resolver el sistema hallando x_1 y x_2 en términos de x_3. $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -4x_1 \\ 2x_1 + 2x_3 = x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 \end{cases} \leftarrow \text{por } 2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 3x_3 \quad \ldots\ldots\ldots \; (1) \\ 4x_1 + 2x_2 = -4x_3 \quad \ldots\ldots\ldots \; (2) \end{cases}$$

sumar: $\quad 8x_1 \quad = -x_3$

$$\boxed{x_1 = -\tfrac{1}{8}x_3} \quad \ldots\ldots\ldots \; (3)$$

Sustituir (3) en (1): $\quad 4\left(-\tfrac{1}{8}x_3\right) + 2x_2 = 3x_3$

$$-4x_3 + 16x_2 = 24x_3$$
$$16x_2 = 28x_3$$
$$4x_2 = 7x_3$$
$$\boxed{x_2 = \tfrac{7}{4}x_3} \quad \ldots\ldots\ldots \; (4)$$

Entonces el vector v, será $\quad v = (x_1 , x_2 , x_3)$

$$v = \left(-\tfrac{1}{8}x_3 , \tfrac{7}{4}x_3 , x_3\right) = \tfrac{1}{8}x_3\,(-1 , 14 , 8)$$

o sea $\; S_1 \cap S_2 = \mathcal{L}\{(-1 , 14 , 8)\}$

Luego $\; dim(S_1 \cap S_2) = 1$

b) Ahora, hallemos una base de $S_3 \cap S_4$:

Sea $u = (a_1 , a_2 , a_3)$ un vector, tal que $u \in S_3 \cap S_4$

Si $u \in S_3 \cap S_4 \;\Rightarrow\; u \in S_3 \;\wedge\; u \in S_4$

Pero: $\quad$ Si $u \in S_3 \;\Rightarrow\; a_1 + 5a_3 = 4a_2$
$\qquad\quad$ Si $u \in S_4 \;\Rightarrow\; a_1 + 3a_2 = 3a_3$ $\Big\}$(I)

A continuación resolvamos el sistema (1), hallando a_1 y a_2 en términos de a_3 :

$$\text{Por } -1 \longrightarrow \begin{cases} a_1 - 4a_2 = -5a_3 & (1) \\ a_1 + 3a_2 = 3a_3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 + 4a_2 = 5a_3 \\ a_1 + 3a_2 = 3a_3 \end{cases}$$

Sumar: $7a_2 = 8a_3$

$$\boxed{a_2 = \tfrac{8}{7} a_3} \quad (3)$$

Sustituir (3) en (1): $a_1 - 4\left(\tfrac{8}{7} a_3\right) = -5a_3$

$$7a_1 - 32a_3 = -35a_3$$

$$7a_1 = -3a_3$$

$$\boxed{a_1 = -\tfrac{3}{7} a_3}$$

En consecuencia el vector u es de la forma:

$$u = (a_1, a_2, a_3) = \left(-\tfrac{3}{7} a_3, \tfrac{8}{7} a_3, a_3\right) = \tfrac{1}{7} a_3 (-3, 8, 7)$$

Luego: $S_3 \cap S_4 = \mathcal{L}\{(-3,8,7)\}$ y $dim(S_3 \cap S_4) = 1$

c) Finalmente, nos falta hallar la dimensión de $(S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4)$:

Sea $v \in ((S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4)) \Rightarrow v \in S_1 \cap S_2 \wedge v \in S_3 \cap S_4$

Si $v \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v = \alpha(-1,14,8)$

Si $v \in S_3 \cap S_4 \Rightarrow v = \beta(-3,8,7)$

Como $v = v$

$$\alpha(-1,14,8) = \beta(-3,8,7)$$

$$\begin{cases} -\alpha = -3\beta \\ 14\alpha = 8\beta \\ 8\alpha = 7\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 & (1) \\ 14\alpha - 8\beta = 0 & (2) \\ 8\alpha - 7\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

(8, 14, +) Mantenimiento fijo (1), multiplicar (1) por 14 y suma a (2) y multiplicar (1) por 8 y sumar a (3)

$$\begin{aligned} -\alpha + 3\beta &= 0 \quad (1) \\ 0 + 34\beta &= 0 \quad (2) \\ 0 + 17\beta &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

De (2) o de (3) obtenemos $\beta = 0$

Luego, el vector $v = \beta(-3,8,7)$ es:

$$v = 0(-3,8,7)$$
$$v = (0,0,0)$$

Es decir $(S_1 \cap S_2) \cap (S_3 \cap S_4) = \{(0,0,0)\}$

En consecuencia: $dim[(S_1 \cap S_2) + S_3 \cap S_4)] = dim(S_1 \cap S_2) + dim(S_3 \cap S_4) = 1 + 1 = 2$

PROBLEMA 10 Sea $V = \{(x,y,z,t) \in I\!K^4 \,/\, x - y + z - t = 0\}$ y $U = \{(x,y,z,t) \in I\!K^4 \,/\, 2x + y + 2z + t = 0\}$

Hallar la dimensión de los siguientes subespacios:

$$U \cap V,\ U + V,\ \frac{I\!K^4}{V},\ \frac{I\!K^4}{U},\ \frac{U+V}{U},\ \frac{U+V}{U \cap V}.$$

Solución:

a) Hallemos $dim(U \cap V)$

Sea $v = (x,y,z,t) \in (U \cap V) \Rightarrow v \in U \wedge v \in V$

$$\left.\begin{aligned} \text{Si } v \in U &\Rightarrow 2x + y + 2z + t = 0 \\ \text{Si } v \in V &\Rightarrow x - y + z + t = 0 \end{aligned}\right\} (I)$$

Resolver el sistema (I) que tiene 2 ecuaciones y 4 incógnitas, hallando x e y en términos de z y t:

$$\begin{cases} 2x + y = -2z - t & (1) \\ x - y = -z + t & (2) \end{cases}$$

$$3x = -3z$$

$$\boxed{x = -z} \quad (3)$$

Sustituir (3) en (2): $-z - y = -z + t$

$$y = -t$$

Luego, el vector v tiene la forma: $V = (x,y,z,t) = (-z,-t,z,t) = z(-1,0,1,0) + t(0,-1,0,1)$

Por tanto: $U \cap V = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$

y en consecuencia $dim(U \cap V) = 2$

b) Hallar $dim(U+V) = dim\,U + dim\,V - dim(U \cap V)$
$= dim\,U + dim\,V - 2$

b_1) Hallar $dim\,U$:

Un vector cualquiera $u \in U$ es $u = (x,y,z,t)$ tal que,

$$2x + y + 2z + t = 0$$
$$t = -2x - y - 2z$$

Entonces: $u = (x,y,z,-2x-y-2z)$
$= x(1,0,0,-2) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-2)$

Luego, $U = \mathfrak{L}\{(1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(0,0,1,-2)\}$ y $dim\,U = 3$

b_2) Hallar $dim\,V$:

Un vector $v \in V$ es $v = (x,y,z,t)$, tal que $x - y + z - t = 0$
$x - y + z = t$

Entonces: $v = (x,y,z,x-y+z)$
$v = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,1)$

Luego: $V = \mathfrak{L}\{(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\}$ y $dim\,V = 3$

Por tanto: $dim(U+V) = 3 + 3 - 2$
$= 4$

c) Hallar: $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{V}$

Se tiene: $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{V} = dim\,\mathbb{K}^4 - dim\,V$
$= 4 - 3$
$= 1$

Nota:
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{K}^4 = \mathbb{R}^4$

d) Hallar $dim\,\frac{\mathbb{K}^4}{U}$

Se tiene: $dim\frac{\mathbb{K}^4}{U} = dim\,\mathbb{K}^4 - dim U$
$= 4 - 3$
$= 1$

e) Hallar $dim\left(\frac{U+V}{U}\right)$

Se tiene: $dim\left(\frac{U+V}{U}\right) = dim(U+V) - dim\,U$
$= 4 - 3 = 1$

f) $dim\left(\frac{U+V}{U \cap V}\right) = dim(U+V) - dim(U \cap V)$
$= 4 - 2 = 2$

PROBLEMA 11 Sea $V = \{A \subset \mathbb{R} \,/\, A$ tiene un número finito de elementos$\}$
$\forall\, A, B$ en V y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos:

$$A + B = A \cup B$$
$$\alpha A = \begin{cases} \phi & \text{si } A = \phi \\ \{\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots\ldots, \alpha a_n\} & \text{si } A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \end{cases}$$

Determinar, justificando su respuesta, cuáles de los axiomas de espacio vectorial real, son satisfechos y cuáles no.

Solución:

La operación suma

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(A,B) \longmapsto A + B = A \cup B$$

La operación producto

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha \cdot A = \begin{cases} \phi & \text{, si } A = \phi \\ \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n\}, & \text{si } A = \{a_1, \ldots, a_n\} \end{cases}$$

Para averiguar la validez de cada axioma relativo a la adición debemos tener la idea clara de cuatro cosas:

i) ¿Cómo son los elementos de V?
ii) ¿Cómo se ha definido la operación suma?
iii) ¿Cómo es el elemento neutro O de V, si existe?
iv) ¿Cómo es el elemento opuesto $-x$ de V, si existe?

Como los elementos de V son subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$, nos permitimos en elegir los conjuntos:

$A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$, es subconjunto finito de $\mathbb{R}$ y tiene n elementos.
$B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{R}$, tiene "$m$" elementos
$C = \{c_1, \ldots, c_p\} \subset \mathbb{R}$, tiene "$p$" elementos
$\phi = \{\ \} \subset \mathbb{R}$, tiene "cero" elementos.

A continuación estudiemos la validez de cada axioma:

1. El axioma de la cerradura:

Debo probar que: $A \in V \wedge B \in V$ implica $(A+B) \in V$

Sólo debemos definir la suma $A + B$, así: $A + B = A \cup B$
$= \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$
que es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$, pues tiene "$n+m$" elementos.

Por tanto, afirmamos que $(A+B) \in V$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Se cumple $\forall\, A, B, C$ perteneciente a V, porque $A + B + C$ es finito y la unión de conjuntos es asociativa.

3. $\underbrace{A + O}$ $= A$, $\forall A \in V$

$A \cup \mathbf{O} = A$, implica $\mathbf{O} = \phi$. Pues el ϕ es un subconjunto finito de $I\!R$.

Por tanto, afirmamos que $\exists\, \mathbf{O} = \phi \in V$.

4. "$\forall A \in V,\ \exists -A \in V / A + (-A) = \phi$" .... NO SE CUMPLE.

Definamos la suma $A + (-A)$:

$A + (-A) = A \cup (-A)$, $-A = (-1)A = \{-a_1, \ldots, -a_n\}$

$= \{a_1, a_2, \ldots, a_n, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$ .... NO ES VACÍO

Sólo cuando $A = \phi$, se cumple $\phi + (-\phi) = \phi \cup (-\phi) = \phi$

Como el axioma 4 debe cumplirse "para todo $A \in V$" afirmamos que:

$A + (-A) = \phi$, $\forall A \in V$ .... ES FALSO.

5. $\underbrace{A + B} = \underbrace{B + A}$, $\forall A, B \in V$ .... SE CUMPLE

$A \cup B = B \cup A$

$\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\} = \{b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n\}$

◆ La operación producto definida en V es:

$$\cdot\ :\ I\!R \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha \cdot A = \begin{cases} \phi & , \text{ si } A = \phi \\ \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n\} & , \text{ si } A = \{a_1, \ldots, a_n\} \end{cases}$$

Los axiomas del producto son:

1. El axioma de la cerradura:

Si $A = \phi$ implica $\alpha \cdot A = \phi$, donde $\phi \in V$

Si $A \neq \phi$ implica $\alpha \cdot A = \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n\}$

← Es un subconjunto finito de $I\!R$, pues tiene n elementos

En consecuencia, afirmamos que $\alpha \cdot A \in V$

2. ¿Se cumple el axioma $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A \in V$.

Veamos: $\beta A = \{\beta a_1, \ldots, \beta a_n\}$, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

← Es subconjunto finito de $I\!R$, por tanto $\beta A \in V$

$\alpha(\beta A) = \{\alpha(\beta a_1), \ldots, \alpha(\beta a_n)\}$

$= \{(\alpha\beta) a_1, \ldots, (\alpha\beta) a_n\}$

$= (\alpha\beta) A \in V$

Por tanto: afirmamos que se cumple el axioma 2.

3. ¿Se cumple: $\mathbf{1} \cdot A = A$, $\forall A \in V$, $\mathbf{1} = 1 \in I\!R$?

Por definición del producto: $\mathbf{1} \cdot A = (1)A = \{1 \cdot a_1, \ldots, 1 \cdot a_n\}$, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$= \{a_1, \ldots, a_n\} \in V$

Por lo tanto: afirmamos que el axioma 3 se cumple.

4. ¿Se cumple: $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$? $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A \in V$

Veamos:

$(\alpha + \beta) A$ es: $(\alpha + \beta) A = \{(\alpha + \beta) a_1, \ldots, (\alpha + \beta) a_n\} \in V$

Por otro lado: $\begin{cases} \alpha A = \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n\} \in V \\ \beta A = \{\beta a_1, \ldots, \beta a_n\} \in V \end{cases}$

Por definición: $\alpha A + \beta A = \alpha A \cup \beta A$

$= \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n, \beta a_1, \ldots, \beta a_n\} \in V$

Notamos que: $(\alpha + \beta) A \neq \alpha A + \beta A \Rightarrow$ No se cumple 3.

5. ¿Se cumple: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha \beta$? , $\forall \alpha, \beta \in I\!R$; $\forall A, B \in V$

Veamos: $\alpha(A + B) = \alpha(A \cup B) = \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n, \alpha b_1, \ldots, \alpha b_m\} \in V$

$\alpha A + \alpha B = (\alpha A) \cup (\alpha B) = \{\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n, \alpha b_1, \ldots, \alpha b_m\} \in V$

Como vemos, se cumple la igualdad. Por tanto, el axioma 5 se cumple.

PROBLEMA 12 Sea $V = \{f : [0,1] \longrightarrow I\!R\}$ un espacio vectorial real y sean:

$A = \{f \in V / f(0) + f(1) = 0\}$

$B = \{f \in V / f(x) \geq 0\}$

Determinar si los conjuntos A y B son subespacios de V, en caso de serlo mostrar tres vectores.

Solución:

Sugerencias:

① Lo primero que el estudiante debe hacer es **IDENTIFICAR** y reconocer la forma que tienen los elementos del espacio vectorial V. En este problema, los elementos de V son funciones reales con dominio en el intervalo $[0,1]$.

Si $f \in V$, entonces se cumple que $f : [0,1] \longrightarrow I\!R$

Si $g \in V$, entonces se cumple que $g : [0,1] \longrightarrow I\!R$

② Además, como V es un espacio vectorial real, implica que sobre V están definidas las operaciones suma y producto.

Así: $+ : V \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $+ : I\!R \times V \longrightarrow V$

$(f, g) \longrightarrow (f + g) : [0,1] \longrightarrow I\!R$ $\qquad$ $(\alpha, f) \longrightarrow \alpha f : [0,1] \longrightarrow I\!R$

donde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ donde $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

En el problema se pide probar si A y B son o no subespacios de V.

PARA A Para afirmar que A es subespacio de V se debe probar la validez de tres proposiciones:

i) La función nula $\theta(x) = 0$ es un elemento de A.

ii) Si $f \in A \;\wedge\; g \in A \;\Rightarrow\; (f+g) \in A$

iii) Si $\alpha \in I\!R \;\wedge\; f \in A \;\Rightarrow\; (\alpha f) \in A$

Probemos *i)* Sea $\theta : [0,1] \longrightarrow I\!R$ definido por $\theta(x) = 0$
En este caso se cumple: $\theta \in A$.

Probemos *ii)* Debo probar que $(f+g) \in A$

Para afirmar que $(f+g) \in A$, debo probar que
$(f+g)(0) + (f+g)(1) = 0$

Veamos: Si $f \in A$ implica que $f(0) + f(1) = 0$
Si $g \in A$ implica que $g(0) + g(1) = 0$

Además: $(f+g)(0) + (f+g)(1) =$
$= f(0) + g(0) + f(1) + g(1) = [f(0) + f(1)] + [g(0) + g(1)]$
$= 0 + 0 = 0$

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha f) \in A$

Para afirmar que $(\alpha f) \in A$, debo probar que $(\alpha f)(0) + (\alpha f)(1) = 0$

Veamos: Si $f \in A$ implica que $f(0) + f(1) = 0$

Se debe aplicar la definición: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
$\forall f \in A$; $\forall \alpha \in I\!R$ en la suma:

$$\underbrace{(\alpha f)(0)}_{\alpha f(0)} + \underbrace{(\alpha f)(1)}_{\alpha f(1)} = \alpha\,\underbrace{[f(0) + f(1)]}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow (\alpha f) \in A.$$

Conclusión: A es subespacio de V.

PARA B Debo probar que:

i) La función nula $\theta(x) = 0$ es un elemento de B (se cumple)

ii) Si $f \in B \;\wedge\; g \in B \Rightarrow (f+g) \in B$, $\forall f, g \in B$, si $(f+g)(x) \geq 0$

iii) Si $\alpha \in I\!R \wedge f \in B \Rightarrow (\alpha f) \in B$, $\forall \alpha \in I\!R$, $\forall f \in B$, si $(\alpha f)(x) \geq 0$

Probemos *ii)* Si $f \in B$ implica $f(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$
Si $g \in B$ implica $g(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$

Se cumple: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq 0 + 0 = 0$,
entonces $(f+g)(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$

Probemos *iii)* Si $f \in B$ implica $f(x) \geq 0$
Si $\alpha \in I\!R$, puede ocurrir que $\alpha \geq 0 \vee \alpha < 0$
– Si $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f(x) \geq 0$, en este caso $(\alpha f) \in B$
– Si $\alpha < 0 \wedge f(x) > 0 \Rightarrow \alpha f(x) < 0$, en este caso $(\alpha f) \notin B$

Conclusión: B no es subespacio de V.

Para A, tres vectores (funciones) de A son: $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}$, $x \in [0,1]$

$h(x) = 1 - 2x$, $x \in [0,1]$

PROBLEMA 13 Sea P_3 el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a tres.

Sean: $A = \{p \in P_3 \,/\, p(2) = p(-2) = p(0) = 0\}$
$B = \{p \in P_3 \,/\, p(0) = 1\}$

Indicar si los conjuntos A y B son subespacios de P_3.

Solución:

PARA A Se debe probar que:

i) El polinomio nulo $p(x) = 0$ es un elemento de A

ii) Si $p \in A \;\wedge\; q \in A \Rightarrow (p+q) \in A$, $\forall\, p, q \in A$

iii) Si $\alpha \in I\!R \wedge p \in A \Rightarrow (\alpha p) \in A$, $\forall p \in A$

Probemos *ii)* Debo probar que $(p+q) \in A$.

Para afirmar que $(p+q) \in A$, debo probar que:

$(p+q)(2) = (p+q)(-2) = (p+q)(0) = 0$ sabiendo que $\begin{cases} p(2) = p(-2) = p(0) = 0 \\ q(2) = q(-2) = q(0) = 0 \\ \text{pues: } p \in A \;;\; q \in A \end{cases}$

Veamos:

$$\left.\begin{aligned} (p+q)(2) &= \underbrace{p(2)}_{0} + \underbrace{q(2)}_{0} = 0 + 0 = 0 \\ (p+q)(-2) &= \underbrace{p(-2)}_{0} + \underbrace{q(-2)}_{0} = 0 + 0 = 0 \\ (p+q)(0) &= \underbrace{p(0)}_{0} + \underbrace{q(0)}_{0} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (p+q)(2) = (p+q)(-2) = (p+q)(0) = 0,$$
lo cual implica que $(p+q) \in A$.

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha p) \in A$
Para afirmar que $(\alpha p) \in A$, debo probar que
$(\alpha p)(2) = (\alpha p)(-2) = (\alpha p)(0) = 0$ sabiendo que
$p(2) = p(-2) = p(0) = 0$ pues $p \in A$

Veamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha p)(2) = \alpha \underbrace{p(2)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0 \\ (\alpha p)(-2) = \alpha \underbrace{p(-2)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0 \\ (\alpha p)(0) = \alpha \underbrace{p(0)}_{0} = \alpha \cdot 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(\alpha p)(2) = (\alpha p)(-2) = (\alpha p)(0) = 0 \\ \text{lo cual implica que } (\alpha p) \in A\end{array}$$

Conclusión: A es subespacio de P_3

PARA B Se debe probar que:

i) El polinomio nulo de grado tres $p(x) = 0$ es un elemento de B.
ii) Si $p \in B \wedge q \in B \Rightarrow (p+q) \in B$
iii) Si $\alpha \in I\!R \wedge p \in B \Rightarrow (\alpha p) \in B$

Probemos *i)*

Para afirmar que $(p+q) \in B$ debo probar que:

$(p+q)(0) = 1$ sabiendo que $\begin{cases} p(0) = 1 \wedge q(0) = 1 \\ \text{pues } p \in B \text{ y } q \in B \end{cases}$

Veamos: $(p+q)(0) = \underbrace{p(0)}_{1} + \underbrace{q(0)}_{1}$
$= 1 + 1$
$= 2$, este resultado nos dice que $(p+q) \notin B$

Conclusión: B no es subespacio de P_3.

PROBLEMA 14 Sean: $M_{2\times2}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 , $C = \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}$ una matriz constante.

Definimos: $V = \left\{ A \in M_{2\times2} \,/\, AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ con las operaciones usuales de adición de matrices y multiplicación por un escalar. Demostrar que V es un espacio vectorial.

Demostración:
En primer lugar, averiguaremos qué forma tienen las matrices $A \in V$.

Según la definición de V, las matrices A son $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

tal que $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}c + a_{12}c & a_{11}c + a_{12}c \\ a_{21}c + a_{22}c & a_{21}c + a_{22}c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c(a_{11} + a_{12}) = 0 \\ c(a_{21} + a_{22}) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots (*)$$

Analicemos el sistema de ecuaciones que aparecen en $(*)$:

i) Si $c = 0$, entonces la igualdad $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se cumple $\forall A \in M_{2\times2}$ y en consecuencia $V = M_{2\times2}$, es un espacio vectorial.

ii) Si $c \neq 0$, entonces $\begin{cases} a_{11} = -a_{12} \\ a_{21} = -a_{22} \end{cases}$ y las matrices $A \in V$ tendrán la forma:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, $V = \left\{ A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \Big/ a_{12} \in I\!R \text{ , } a_{22} \in I\!R \right\}$

Se cumple que V es un subespacio de $M_{2\times2}$ con *dim* $V = 2$ y se verifican las operaciones: (1) Suma de matrices, y (2) Multiplicación por un escalar.

Veamos estas operaciones:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(A, B) \longmapsto A + B = \begin{bmatrix} -(a_{12} + b_{12}) & (a_{12} + b_{12}) \\ -(a_{22} + b_{22}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\cdot : I\!R \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, A) \longmapsto \alpha A = \begin{bmatrix} -\alpha a_{12} & \alpha a_{12} \\ -\alpha a_{22} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{12} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -b_{12} & b_{12} \\ -b_{22} & b_{22} \end{bmatrix}$

Estas operaciones definidas en V cumplen todos los axiomas de espacio vectorial.
En consecuencia V es un espacio vectorial.

PROBLEMA 15 Pruebe que el conjunto U de las matrices triangulares inferiores y el conjunto W de las matrices triangulares superiores son subespacios vectoriales, de $M(n\times n)$, que $M(n\times n)=U+W$ y que no se cumple $M(n\times n)=U\oplus W$.

Demostración:

Se tiene: $M(n\times n)=\left\{(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n2} & a_{nn}\end{bmatrix} : a_{ij}\in I\!R\right\}$ matrices cuadradas de orden n.

- $U=\{(a_{ij})\in M(n\times n)/a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\}$ matrices triangulares inferiores.
- $W=\{(a_{ij})\in M(n\times n)/a_{ij}=0\ ,\ \forall i>j\}$ matrices triangulares superiores.

a) U es un subespacio vectorial de $M(n\times n)$, porque cumplen:

i) La matriz nula θ de $M(n\times n)$ es un elemento de U, porque cumple la definición dada en el conjunto U.

ii) Elegir: $\begin{cases} A=(a_{ij}) \text{ con } a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j \\ B=(b_{ij}) \text{ con } b_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\end{cases}$

La suma: $A+B=C$; donde $C=(C_{ij})$, tal que, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ es un elemento de U.

$$=0+0$$
$$=0,\ \forall i<j$$

iii) Elegir: $\begin{cases} \alpha\in I\!R \\ A=(a_{ij}),\text{con } a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j\end{cases}$

El producto: $\alpha A=(\alpha\, a_{ij})$ es un elemento de U, porque cumple $\alpha\, a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j$.

b) De manera similar se prueba que W es un subespacio de $M(n\times n)$.

c) Definamos la suma: $U+W$

Un elemento $C\in U+W$ es $C=A+B$, tal que, $A\in U$, $B\in W$.

donde $A=(a_{ij})$ con $a_{ij}=0\ ,\ \forall i<j$

y $B=(b_{ij})$ con $b_{ij}=0\ ,\ \forall i>j$

$C=(c_{ij})$ es la matriz suma, tal que, $c_{ij}=\begin{cases} b_{ij} & ,\ \text{si } i<j \\ a_{ii}+b_{ii} & ,\ \text{si } j=i \\ a_{ij} & ,\ \text{si } i>j\end{cases}$

Esto demuestra que los elementos de $U+W$ son matrices de $M(n\times n)$

d) Si $A\in U\cap W$ entonces A es, a la vez, triangular inferior y superior. Entonces A es una matriz diagonal con algún $a_{ii}\neq 0$. Este resultado nos indica que $U\cap W\neq\{\theta\}$.

En consecuencia: $M(n\times n)\neq U\oplus W$.

PROBLEMA 16 Dados $X,Y\subset I\!R$, sean

F = conjunto de la funciones $f:I\!R\longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos de X.

G = conjunto de funciones $g:I\!R\longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos de Y.

Pruebe:
a) F y G son subespacios de $E=\mathcal{F}(I\!R;I\!R)$
b) Se tiene $E=F+G$ si, y sólo si, $X\cap Y=\varnothing$
c) Se tiene $F\cap G=\{0\}$ si, y sólo si, $X\cup Y=I\!R$
d) Se cumple que $E=F\oplus G$ si, y sólo si, $Y=I\!R-X$

Prueba de a) $E=\mathfrak{F}(I\!R;I\!R)=\{\ f:I\!R\longrightarrow I\!R\ /f$ es una función real variable real $\}$

$$F=\{f:I\!R\longrightarrow I\!R\,/\,f(x)=0\,,\forall x\in X\,,X\subset I\!R\}$$
$$G=\{g:I\!R\longrightarrow I\!R\,/\,g(x)=0\,,\forall x\in Y\,,Y\subset I\!R\}$$

i) La función nula $\theta(x)=0\ ,\ \forall x\in I\!R$, es un elemento de F puesto que cumple $\theta(x)=0$, para $x\in X\subset I\!R$.

ii) Sean: f,g elementos de F, entonces $f(x)=0\ ,\ \forall x\in X$ y $g(x)=0\ \ \forall x\in X$.
La suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0+0=0\ ,\ \forall x\in X$ es un elemento de F.

iii) Sea $\alpha \in I\!R$ y $f \in F$. El producto αf es un elemento de F por la siguiente razón. $(\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$. Pero $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$

entonces $= \alpha \cdot 0$

$= 0 \;,\quad \forall x \in X$

Por lo tanto, F es un subespacio de E.

♦ De manera similar se demuestra que G es un subespacio de E.

Prueba de c)

¿Qué significa $F \cap G = \{0\}$ s.s.s. $X \cup Y = I\!R$?

Elegir una función f de F, el cual será $f : X \longrightarrow I\!R$

$x \longmapsto f(x) = 0$

Elegir una función g de G, el cual será $g : Y \longrightarrow I\!R$

$x \longmapsto g(x) = 0$

($\Leftarrow$) Si $X \cup Y = I\!R$ implica que $f + g : \underbrace{X \cup Y}_{I\!R} \longrightarrow I\!R$

$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$$

Este resultado nos indica que la función suma $h(x) = (f+g)(x) = 0 \;,\; \forall x \in I\!R$

$= \theta\ (x) = 0$

es la función NULA, donde $f \in F$, $g \in G$. Lo cual implica que $F \cap G = \{0\}$ (función nula)

($\Rightarrow$) queda como ejercicio.

Prueba de a), b) y d) son consecuencias de razonamiento similar.

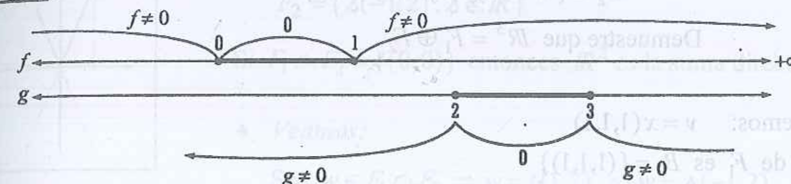
PROBLEMA 17 En el espacio vectorial $E = \Im(I\!R, I\!R)$ sean:

F_1 = conjunto de funciones $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos del intervalo $[0,1]$

F_2 = conjunto de funciones $g : I\!R \longrightarrow I\!R$ que se anulan en todos los puntos del intervalo $[2,3]$

Pruebe que F_1 y F_2 son subespacios vectoriales de E, que $E = F_1 + F_2$ y que no se cumple $E = F_1 \oplus F_2$.

Solución:



Tenemos: $F_1 = \{ f : I\!R \longrightarrow I\!R \,/\, f(x) = 0 \,,\, \forall x \in [0,1] \subset I\!R \}$

$F_2 = \{ g : I\!R \longrightarrow I\!R \,/\, g(x) = 0 \,,\, \forall x \in [2,3] \subset I\!R \}$

a) Probar que F_1 y F_2 son subespacios vectoriales de E es similar al problema 16.

b) Si $h \in E = F_1 + F_2$ entonces $h(x) = f(x) + g(x)$, con $f \in F_1$, $g \in F_2$

$= (f+g)(x)$

esta suma de funciones existe si la intersección de los dominios de f y g no es vacío.

$$h(x) = \begin{cases} f+g \;, & x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 0+g \;, & x \in [0,1] \\ f+g \;, & x \in \langle 1,2\rangle \\ f+0 \;, & x \in [2,3] \\ f+g \;, & x \in \langle 3+\infty\rangle \end{cases}$$

c) Sea $h \in F_1 \cap F_2$, entonces $h \in F_1 \quad \wedge \quad h \in F_2$

Si $h \in F_1$ entonces $h(x) = \begin{cases} 0 \;, & \text{si } x \in [0,1] \\ h(x) \neq 0 \;, & \text{si } x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \end{cases}$

Si $h \in F_2$ entonces $h(x) = \begin{cases} 0 \;, & \text{si } x \in [2,3] \\ h(x) \neq 0 \;, & \text{si } x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \end{cases}$

Como notamos, $h(x)$ no es la FUNCIÓN NULA, por tanto, el espacio vectorial E no es la suma directa de F_1 y F_2.

PROBLEMA 18 Considere los subespacios $F_1, F_2 \subset I\!R^3$ así definidos:

$$F_1 = \{v = (x,x,x) / x \in I\!R\}$$

$$F_2 = \{w = (x,y,0) / x,y \in I\!R\}$$

Demuestre que $I\!R^3 = F_1 \oplus F_2$

Prueba:

De F_1 obtenemos: $v = x(1,1,1)$

Una base de F_1 es $B_1 = \{(1,1,1)\}$

De F_2 obtenemos: $w = x(1,0,0) + y(0,1,0)$

Una base de F_2 es $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Si se cumple: $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$, entonces $I\!R^3 = F_1 \oplus F_2$

Veamos:

Sea $\mu \in F_1 \cap F_2$ entonces $\mu \in F_1 \;\wedge\; \mu \in F_2$

♦ Si $\mu \in F_1$ entonces $\mu = t(1,1,1)$ .... (1)

♦ Si $\mu \in F_2$ entonces $\mu = s(1,0,0) + r(0,1,0)$

Luego: $t(1,1,1) = s(1,0,0) + r(0,1,0)$

$$\begin{cases} t = s \\ t = r \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ r = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

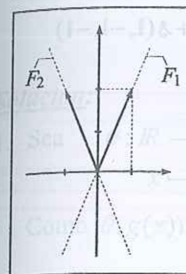
♦ En (1), si $t = 0$, obtenemos $\mu = 0(1,1,0) = (0,0,0)$. Este resultado nos indica que $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$ y por tanto $I\!R^3 = F_1 \oplus F_2$

$$= gen\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$$

Es decir: $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de $I\!R^3$.

PROBLEMA 19 Dados $\mu = (1,2)$ y $v = (-1,2)$, sean F_1 y F_2 respectivamente las rectas que pasan por el erigen en $I\!R^2$ y contienen μ y v, respectivamente. Demuestre que $I\!R^2 = F_1 \oplus F_2$.

Demostración:



Por los datos se tiene:

$$F_1 = \{t(1,2) : t \in I\!R\}$$

$$F_2 = \{s(-1,2) : s \in I\!R\}$$

Si $F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$ entonces $I\!R^2$ es la suma directa de F_1 y F_2

♦ ***Veamos:***

Sea $w \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow w = t(1,2) \;\wedge\; w = s(-1,2)$

Al igualar: $t(1,2) = s(-1,2) \iff \begin{cases} t = -s \\ 2t = 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + s = 0 \\ 2t + 2s = 0 \end{cases}$

♦ La solución es $t = 0$. Luego $w = 0(1,2) = (0,0)$.

♦ Conclusión: $I\!R^2 = F_1 \oplus F_2$

PROBLEMA 20 Sean $F_1 = \mathfrak{L}\{\mu_1, v_1\}$ y $F_2 = \mathfrak{L}\{\mu_2, v_2\}$ los subespacios de $I\!R^3$ generados por los vectores $\mu_1 = (0,1,-2)$, $v_1 = (1,1,1)$, $\mu_2 = (-1,0,3)$ y $v_2 = (2,-1,0)$. Encuentre números a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_3 tales que: $F_1 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 ; a_1x + b_1y + c_1z = 0\}$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in I\!R^3 ; a_2x + b_2y + c_2z = 0\}$$

Solución:

- Si $(x,y,z) \in F_1 \Rightarrow \exists\, t, s \in I\!R : (x,y,z) = t(0,1,-2) + s(1,1,1)$

  Igualar, hallar s y t, reemplazar en la tercera ecuación obteniéndose $3x - 2y - z = 0$; $a_1 = 3$, $b_1 = -2$, $c_1 = -1$.

- Si $(x,y,z) \in F_2 \Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in I\!R : (x,y,z) = \alpha(-1,0,3) + \beta(2,-1,0)$.

  Resolver el sistema y obtenemos: $3x + 6y + z = 0$.

PROBLEMA 21 Sea F el subespacio de $I\!R^3$ generado por los vectores $\mu = (1,1,1)$ y $v = (1,-1,-1)$. Encuentre números a, b, c con la siguiente propiedad: un vector $w = (x,y,z)$ pertenece a F si, y sólo si, $ax + by + cz = 0$.

Solución:

$(\Rightarrow)$ Si $(x,y,z)\in F \Rightarrow$ existen $t,s\in I\!R$ tal que, $(x,y,z)=t(1,1,1)+s(1,-1,-1)$

$$\begin{cases} x=t+s \;\ldots\ldots\; (1)\\ y=t-s \;\ldots\ldots\; (2)\\ z=t-s \;\ldots\ldots\; (3)\end{cases}$$

igualando (2) y (3) obtenemos: $y=z \longleftrightarrow y-z=0 \begin{cases} a=0\\ b=1\\ c=-1\end{cases}$

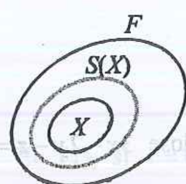
$(\Leftarrow)$ Queda como tarea.

PROBLEMA 22 Sea E un espacio vectorial. Sea $X=\{v_1,\ldots,v_m\}$ un subconjunto de E. El conjunto $S(X)=\{\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_m u_m\}$ es el subespacio vectorial de E generado por X.

Demostrar que $S(X)$ es la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen al conjunto $X\subset E$.

Demostración:

- Se cumple: $X\subset S(X)$ y $S(X)$ es el menor subespacio de E que contiene a X. En otras palabras, si F es un subespacio vectorial de E y $X\subset F$ entonces $S(X)\subset F$



Por lo afirmado anteriormente, deducimos:

Si $F_1,F_2,\ldots,F_n,\ldots$ son subespacios de E, entonces se cumple.

$$X\subset S(X)\subset F_1$$
$$X\subset S(X)\subset F_2$$
$$\vdots$$
$$X\subset S(X)\subset F_n$$

intersectar: $X\subset S(X)\subset \bigcap_{i=1} F_i$

PROBLEMA 23 Sea $E=\Im(I\!R,I\!R)=\{f:I\!R\longrightarrow I\!R \,/\, f$ es una función$\}$

Fijada $g:I\!R\longrightarrow I\!R$, pruebe que el conjunto F de todas las funciones $f:I\!R\longrightarrow I\!R$ tales que $f(g(x))=f(x)$, es un subespacio vectorial de E. ¿Para qué función g se tiene $F=$ conjunto de las funciones periódicas de período a? ¿Y si fuese $g(f(x))=f(x)$ ó $f(g(x))=g(x)$?

Solución:

1. Sea $\theta: I\!R\longrightarrow I\!R$ la función nula que pertenece al conjunto E.

$$x\longmapsto \theta(x)=0$$

Como $\theta(g(x))=\theta(x)=0$, entonces $\theta\in F$

2. Sean $f,h: I\!R\longrightarrow I\!R$ dos funciones de F.

$(f+h)(g(x))=(f+h)(x)$ .... definición de F

$=f(x)+h(x)$ .... definición de suma de funciones

$=f(g(x))+h(g(x))$ .... $f,h\in F$

Por tanto, la suma $f+h$ es un elemento de F.

3. Sea $\alpha\in I\!R$, $f\in F$, se tiene:

$(\alpha f)(g(x))=(\alpha f)(x)$ .... definición de F

$=\alpha f(x)$ .... definición de producto

$=\alpha f(g(x))$ .... $f\in F$

Por tanto, αf es un elemento de F.

Por 1., 2., y 3. afirmamos que F es un subespacio vectorial de E.

- Sea $F=\{f:I\!R\longrightarrow I\!R \,/\, f(x+a)=f(x)\}$, a: período.

  En este caso $g(x)=x+a$, $x\in I\!R$

- Si $g(f(x))=f(x)$, entonces $g=I$, I es la función identidad.

  Si $f(g(x))=g(x)$, entonces $f=I$.

PROBLEMA 24 Se dice que una función $f:X\longrightarrow I\!R$ es acotada si existe $k>0$ (dependiendo de f) tal que $|f(x)|\le k$ para todo $x\in X$.

Demuestre que el conjunto de las funciones acotadas es un subespacio vectorial de $\Im(x;I\!R)=\{f:X\rightarrow I\!R \,/\, f$ es una función$\}$, generado por las funciones acotadas positivas.

Solución:

Sea $G = \{ f : X \longrightarrow I\!R / |f(x)| \le K \}$ el conjunto de las funciones acotadas. ¿Es G un subespacio vectorial de $\mathfrak{F}$?

Veamos:

1) La función nula $\theta : X \longrightarrow I\!R$ ¿es un elemento de G?

$$x \longmapsto \theta(x) = x$$

Si, porque siempre es posible encontrar un número real positivo K, tal que $|\theta(x)| < k$, $\forall\, x \in X$.

2) Al elegir dos funciones f y g de G, ¿ $f + g$ es un elemento de G?

Debo probar que existe $k > 0$, tal que, $|f + g| \le k$

Veamos:

$|f + g| \le |f| + |g|$ .... propiedad triangular

$\le \underbrace{k_1 + k_2}_{\le\ k}$, porque existen $k_1 > 0$, $k_2 > 0$; tal que $|f| \le k_1$, $|g| \le k_2$; porque $f, g \in G$

3) Al elegir $\alpha \in I\!R$, $f \in G$ ¿ αf es un elemento de G?

Debo probar que existe $k > 0$, tal que, $|\alpha f| \le k$.

Veamos:

$|\alpha f| = |\alpha||f|$ .... producto de valore absolutos

Pero, $\exists\, k_1 > 0$, tal que, $|f| \le k_1$; porque $f \in G$

Luego: $|\alpha f| = |\alpha||f| \le \underbrace{|\alpha| k_1}_{k}$. Por tanto, $\alpha f \in G$.

CONCLUSIÓN: G es un subespacio vectorial de $\mathfrak{F}$.

PROBLEMA 25 Dado los vectores $\mu = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_1, b_2, b_3)$ y $w = (c_1, c_2, c_3)$, escriba $\mu' = (a_1, a_2)$, $v' = (b_1, b_2)$ y $w' = (c_1, c_2)$.

Suponiendo μ' y v' L.I., existen $\alpha, \beta \in I\!R$ tales que $w' = \alpha\mu' + \beta v'$. Pruebe que $\{\mu, v, w\}$ es L.D. si, y sólo si, $w = \alpha\mu + \beta v$ (con los mismos α y β). Use este criterio para determinar si los vectores μ, v, w siguientes son L.I. o L.D.

a) $\mu = (1,2,3)$, $v = (1,3,2)$, $w = (-1, 2, -7)$

b) $\mu = (1,2,3)$, $v = (1,3,2)$, $w = (1, 4, 1)$

Solución:

($\Leftarrow$) La igualdad $w = \alpha\mu + \beta v$ implica que $\{\mu, v, w\}$ es L.D.

Prueba:

De $w' = \alpha\mu' + \beta v'$ obtenemos $\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 = c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 = c_2 \end{cases}$

Al resolver el sistema para α y β, obtenemos $\alpha = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_1}$

$$\beta = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_1 - a_2 b_1}$$

Si al calcular: $\alpha\mu + \beta v$ obtenemos w, se estará probando que w es combinación lineal de los vectores μ y v. Por lo tanto podemos afirmar que $\{\mu, v, w\}$ es L.D.

Veamos: $\alpha\mu + \beta v = \left(\dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_1}\right)\mu + \left(\dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_1 - a_2 b_1}\right)v$

Haciendo las cuentas, se obtiene $\alpha\mu + \beta v = (c_1, c_2, c_3)$ que es w. ■

($\Rightarrow$) queda como ejercicio.

(*a*) y (*b*), quedan como ejercicio.

PROBLEMA 26 Demuestre que las matrices a, b y c siguientes, son L.I.

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostración:

Si $\alpha a + \beta b + \gamma c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ implica que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, afirmamos que a, b y c son L.I. (concluya).

PROBLEMA 27 Si una función en $C^\infty(I\!R)$ es combinación lineal de otras, entonces sus derivadas sucesivas son combinaciones lineales (con los mismos coeficientes) de las derivadas de otras. Use este resultado para probar que $\{e^x, e^{2x}, x^3, x^2, x\}$, es un conjunto L.I.

Prueba:

Recordar que: $C^{\infty}(I\!R)$ es el conjunto de las funciones reales de variable real que son continuas en $I\!R$ y todas sus derivadas también son continuas en $I\!R$. Son las llamadas funciones de clase C infinito.

Debo probar que: $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x = 0$ .... (1)
implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

Para ello, bastará derivar sucesivamente.

Así: 1ª derivada $\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 = 0$ .... (2)

2ª derivada $\alpha_1 e^x + 4\alpha_2 e^{2x} + 6\alpha_3 x + 2\alpha_4 = 0$ .... (3)

3ª derivada $\alpha_1 e^x + 8\,\alpha_2 e^{2x} + 6\,\alpha_3 = 0$ .... (4)

4ª derivada $\alpha_1 e^x + 16\,\alpha_2 e^{2x} = 0$ .... (5)

Dividir entre e^x : $\alpha_1 + 16\,\alpha_2 e^x = 0$ .... (6)

La igualdad (6) es verdadero sólo cuando: $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, porque las funciones exponenciales e^x y e^{2x} es diferente de cero para todo $x \in I\!R$.

Al reemplazar, sucesivamente, en (4), (3) y (2), obtendremos $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

PROBLEMA 28 Pruebe que $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ es un conjunto L.I. en el espacio $C^{\infty}(I\!R)$.

Demostración (aplicar el mismo procedimiento del problema anterior y divida entre e^x).

PROBLEMA 29 Sean $X_1, \dots, X_n, \dots$ subconjuntos L.I. del espacio vectorial E.

a) Si $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$, pruebe que $X = \cup X_n$ es L.I.

b) Si cada X_n tiene n elementos, pruebe que existe un conjunto linealmente independiente $X^* = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ tal que $x_n \in X_n$ para cada $n \in I\!N$.

c) Suponiendo $E = I\!R^{(\infty)}$ y admitiendo las hipótesis de los ítems anteriores, ¿es verdad que $X = \cup X_n$ sería una base de E ?

Demostración de a)

Si cada subconjunto X_i con $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ es infinito, entonces X_i es L.I. si al elegir un subconjunto finito $A_k \subset X_i$, A_k también es L.I.

De esto, deducimos:

Si X_1 es L.I. y A_{k_1} es un conjunto finito de k_1 elementos y $A_{k_1} \subset X_1$, entonces A_{k_1} es L.I..

Si X_2 es L.I. y A_{k_2} es un conjunto finito de k_2 elementos y $A_{k_2} \subset X_2$, entonces A_{k_2} es L.I..

⋮

Si X_n es L.I. y A_{k_n} es un conjunto finito de k_n elementos y $A_{k_n} \subset X_n$, entonces A_{k_n} es L.I..

⋮

etc.

Así tenemos: $A_{k_1} \subset X_1$

$A_{k_2} \subset X_2$

⋮

$A_{k_n} \subset X_n$

Al unir: $\bigcup_{i=1}^{n} A_{k_i}$ es L.I. entonces $\bigcup X_n$ es L.I.

Porque $\bigcup_{i=1}^{n} A_{k_i}$ es L.I. entonces $\bigcup X_n$ es L.I.

Demostración de b) *(es el caso finito)*

Por hipótesis se tiene: $X_1 = \{x_1\}$ es L.I.

$X_2 = \{x_1, x_2\}$ es L.I.

$X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ es L.I.

⋮

$X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es L.I.

⋮

Al unir, se obtiene: $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} = X^*$ que es un conjunto L.I.

c) Como $E = I\!R^{(\infty)}$ es espacio vectorial de dimensión infinita, entonces una base de E es un conjunto infinito y por lo tanto $X = \bigcup X_n$ es una base de E .

PROBLEMA 30 Si los vectores $v_1,\ldots,v_m$ son L.I., pruebe que lo mismo se da con los vectores $v_1, v_2-v_1,\ldots,v_m-v_1$. ¿Es cierta la recíproca?

Prueba:

Sean los escalares: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$; tal que,

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2(v_2-v_1)+\alpha_3(v_3-v_1)+\ldots+\alpha_m(v_m-v_1)=0$$

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2-\alpha_2 v_1+\alpha_3 v_3-\alpha_3 v_1+\ldots+\alpha_m v_m-\alpha_m v_1=0$$

$$(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_m)v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_m v_m=0$$

Como $v_1,\ldots,v_m$ son L.I. entonces: $\underbrace{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_m=0}_{(1)}$, $\alpha_2=0,\ldots,\alpha_m=0$

Al sustituir en (1) $\alpha_2=\ldots\alpha_m=0$, obtenemos $\alpha_1=0$.

En consecuencia: $v_1, v_2-v_1,\ldots v_m-v_1$ son L.I.

La recíproca: si $v_1, v_2-v_1,\ldots v_m-v_1$ son L.I. entonces $v_1,\ldots,v_m$ ¿son L.I.? ... queda como ejercicio.

PROBLEMA 31 Sea X un conjunto infinito. Para cada $a\in X$, sea $f_a: X\longrightarrow I\!R$ la función tal que $f_a(x)=\begin{cases}1 , & \text{si } x=a\\ 0 , & \text{si } x\neq a\end{cases}$

Pruebe que el conjunto $Y\subset\mathcal{F}(X;I\!R)$, formado por estas funciones, es linealmente independiente, luego $\mathcal{F}(X;I\!R)$ no tiene dimensión finita. Pruebe también que Y no genera $\mathcal{F}(X;I\!R)$.

Prueba:

Se tiene $Y=\left\{ f_a: X\longrightarrow I\!R / f_a(x)=\begin{cases}1 , & x=a\\ 0 , & x\neq a\end{cases}\right\}\subset\mathcal{F}(X;I\!R)$

1. Sean $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ elementos de Y

   Elegir un conjunto finito $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subset X$ donde los a_i son diferentes entre sí.

   Definimos:

Para $a_1\in X$ $\quad f_1(x)=\begin{cases}1 , & \text{si } x=a_1\\ 0 , & \text{si } x\neq a_1\end{cases}$

Para $a_2\in X$ $\quad f_2(x)=\begin{cases}1 , & \text{si } x=a_2\\ 0 , & \text{si } x\neq a_2\end{cases}$

$\vdots$

Para $a_n\in X$ $\quad f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x=a_n\\ 0 , & \text{si } x\neq a_n\end{cases}$

2. Suponer que $c_1 f_1+c_2 f_2+\ldots+c_n f_n=0$ debo probar que $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$

Veamos:

3. En 2. evaluar las funciones $c_1 f_1+c_2 f_2+\ldots+c_n f_n$ en cada a_i.

   Así obtenemos:

   Cuando $a_1\in X$, entonces $c_1\underbrace{f_1(a_1)}_{1}+c_2\underbrace{f_2(a_1)}_{0}+\ldots+c_n\underbrace{f_n(a_n)}_{0}=0$

   $c_1=0$

   Cuando $a_2\in X$, entonces $c_1\underbrace{f_1(a_2)}_{0}+c_2\underbrace{f_2(a_2)}_{1}+\ldots+c_n\underbrace{f_n(a_2)}_{0}=0$

   $c_2=0$

   $\vdots$

   Cuando $a_n\in X$, entonces $c_1\underbrace{f_1(a_n)}_{0}+a_2\underbrace{f_2(a_n)}_{0}+\cdots+c_n\underbrace{f(a_n)}_{1}=0$

   $c_n=0$

4. Como $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, afirmamos que $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ es L.I.

Probar que Y no genera $\mathcal{F}(X;I\!R)$ queda como ejercicio.

PROBLEMA 32 Sea $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base del espacio vectorial E. Si los números $a_1,\ldots,a_n$ no son todas iguales a cero, pruebe que el conjunto F de los vectores $v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$ tales que $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$, es un subespacio vectorial de E, con $\dim F=n-1$.

Solución:

1. $0 \in F$, porque $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_n$ tal que $a_1(0) + \ldots + a_n(n) = 0$.

2. ¿ $\alpha v + \mu \in F$? $\alpha \neq 0$, $\alpha \in I\!K$, $v \in F$, $\mu \in F$

$\alpha v = (\alpha x_1)v_1 + \ldots + (\alpha x_n)v_n$ tal que $a_1(\alpha x_1) + \ldots + a_n(\alpha x_n) = 0$

viene de multiplicar por α la ecuación $a_1x_1 + \ldots + a_ny_n = 0$

$\mu = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n$ tal que $a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0$

Luego $\alpha v + \mu = (\alpha x_1 + y_1)v_1 + \ldots + (\alpha x_n + y_n)v_n$, tal que
$a_1(\alpha x_1 + y_1) + \ldots + a_n(\alpha x_n + y_n) = 0$ lo cual prueba que $\alpha v + \mu \in F$.

Por lo tanto, F es un subespacio vectorial de E.

- Si de $a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0$ despejamos x_n :

$$x_n = -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \frac{a_2}{a_n}x_2 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1} \ , \ a_n \neq 0$$

Entonces:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(x_1, x_2, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}x_1 - \frac{a_2}{a_n}x_2 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1} \right) =$$

$$= x_1\left(1, 0, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}\right) + x_2\left(0, 1, \ldots, -\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots + x_{n-1}\left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

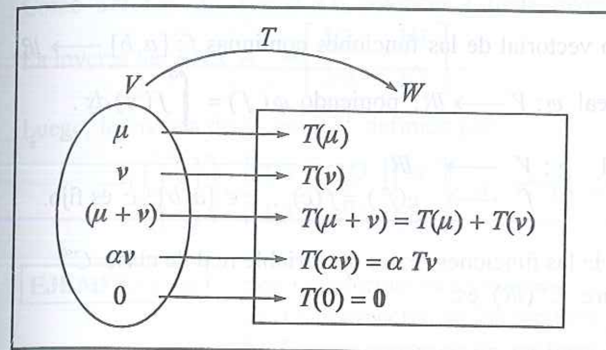
Se obtiene: $\left\{ \left(1, 0, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}\right), \left(0, 1, \ldots, -\frac{a_2}{a_n}\right), \ldots, \left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \right\}$ es una base de F de $n-1$ vectores.

Entonces $\dim F = n - 1$.

CAPÍTULO 4 TRANSFORMACIONES LINEALES

1. DEFINICIÓN 1

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$. Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es una correspondencia que a cada vector $v \in V$ le asigna un vector $T(v) \in W$ tal que, para cualquier $\mu, v \in V$ y $\alpha \in I\!K$, se cumple la relación $T(\alpha\mu + v) = \alpha\, T(\mu) + T(v)$.



Observación:

La particularidad de una transformación lineal es que preserva las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector.

1.1 EL CONJUNTO DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$, el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, se denota por $\mathfrak{L}(V, W) = \{ T: V \longrightarrow W \,/\, T$ es una transformación lineal de V en $W \}$.

El conjunto $\mathfrak{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

1.2 OPERADORES LINEALES

Las transformaciones lineales $T: V \longrightarrow V$, del espacio vectorial V en sí mismo, se llaman **OPERADORES LINEALES** en V.

Si $W = V$, usamos la notación $\mathfrak{L}(V)$ en vez de $\mathfrak{L}(V, V)$, donde
$\mathfrak{L}(V) = \{ T: V \longrightarrow V \,/\, T$ es una transformación lineal en $V \}$.

1.3 FUNCIONALES LINEALES

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo IK y IR el conjunto de los números reales.

Las transformaciones lineales φ de V en IR, son llamados funcionales lineales.

Esto es, si la función $\varphi : V \longrightarrow IR$, $v \longmapsto \varphi(v)$

cumple $\varphi(\alpha\mu + v) = \alpha\varphi(\mu) + \varphi(v)$, $\forall\ \alpha \in IK$; $\forall\ \mu, v \in V$, diremos que φ es una funcional de V en IR.

El conjunto $V^* = \mathfrak{L}(V, IR) = \{\varphi : V \longrightarrow IR \,/\, \varphi$ es una transformación lineal$\}$ se llama el espacio vectorial **dual** de V.

2. EJEMPLOS

1. $\varphi : IR^n \longrightarrow IR$ definido por $\varphi(v) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, donde $v = (x_1, \ldots, x_n)$ es una funcional lineal.

2. Si $V = C^{\circ}([a,b])$ es el espacio vectorial de las funciones continuas $f : [a,b] \longrightarrow IR$, podemos definir la funcional lineal $\varphi : V \longrightarrow IR$, poniendo $\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

   También, es una funcional lineal $g : V \longrightarrow IR$, $f \longmapsto g(f) = f(c)$, $c \in [a,b]$, c es fijo.

3. Sea $C^{\infty}(IR)$ el espacio vectorial de las funciones reales de variable real de clase C^{∞}. El operador de derivación D sobre $C^{\infty}(IR)$ es:

   $$D : C^{\infty}(IR) \longrightarrow C^{\infty}(IR)$$
   $$f \longmapsto Df = f' \text{ , donde } f' \text{ es la derivada de } f.$$

   D es una funcional lineal definida en $C^{\infty}(IR)$

4. Sea $V = IR^{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos en IR y $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$.

   La traza de A es el escalar $tr\,A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

   La función traza es un funcional lineal de $IR^{n\times n}$ en IR.

   $$tr : IR^{n\times n} \longrightarrow IR$$
   $$A \longmapsto tr\,A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

A continuación veamos que una transformación lineal

$T : IR^n \longrightarrow IR^m$ esta asociada a una matriz A_{mn}.

EJEMPLO 01 Hallar la matriz asociada a la transformación lineal $T : IR^2 \longrightarrow IR^2$ definida por $T(x,y) = (2x + y, x - y)$.

Porque el conjunto de vectores $IR^2 = \{(x,y) : x, y \in IR\}$ es isomorfo al conjunto de matrices $M_{2\times1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in IR \right\}$, la transformación lineal T se puede escribir del modo siguiente:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Así obtenemos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ es la matriz de $IR^{2\times 2}$ asociada a T.

Como $\det A = -2 - 1 = -3 \neq 0$, entonces A tiene inversa.

La inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

Luego, la inversa de T es T^{-1} definido por:

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad T^{-1}(x,y) = \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y, \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y\right)$$

EJEMPLO 02 Son transformaciones lineales:

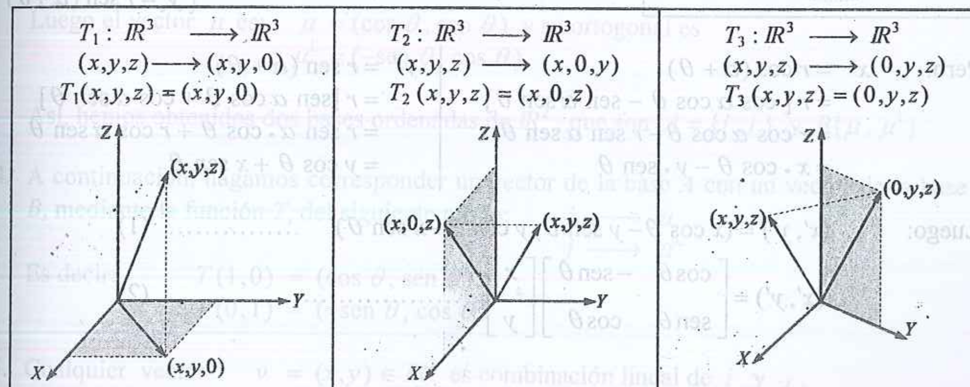
a) La proyección de los vectores $(x,y,z) \in IR^3$ sobre el plano XY

b) La proyección de los vectores $(x,y,z) \in IR^3$ sobre el plano XZ

c) La proyección de los vectores $(x,y,z) \in IR^3$ sobre el plano YZ

Estas proyecciones lineales se expresan del siguiente modo:

$T_1 : IR^3 \longrightarrow IR^3$	$T_2 : IR^3 \longrightarrow IR^3$	$T_3 : IR^3 \longrightarrow IR^3$
$(x,y,z) \longrightarrow (x,y,0)$	$(x,y,z) \longrightarrow (x,0,y)$	$(x,y,z) \longrightarrow (0,y,z)$
$T_1(x,y,z) = (x,y,0)$	$T_2(x,y,z) = (x,0,z)$	$T_3(x,y,z) = (0,y,z)$



Probemos que T_1 es una transformación lineal ($t.\ell.$), para ello, aplicaremos la definición resumida:

$$T_1(\alpha\mu + v) = \alpha T_1(\mu) + T_1(v)\ ,\ \text{para todo } \mu = (x,y,z) \in I\!R^3\ ,$$

$v = (m,n,s) \in I\!R^3$ y para todo $\alpha \in I\!R$, donde $\alpha\mu = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$,

$\alpha\mu + v = (\alpha x + m, \alpha y + n, \alpha z + s)$

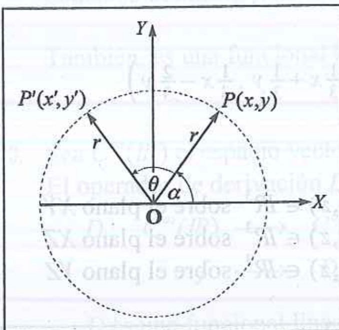
Veamos:

$$\begin{aligned} T_1(\alpha\mu + v) &= T_1(\alpha x + m\ ,\ \alpha y + n\ ,\ \alpha z + s) \\ &= (\alpha x + m\ ,\ \alpha y + n, 0) \\ &= \alpha(x, y, 0) + (m,n,0) \\ &= \alpha T_1(x,y,z) + T_1(m,n,0) \\ &= \alpha T_1(\mu) + T_1(v) \end{aligned}$$

De manera similar, se prueba que T_2 y T_3 son transformaciones lineales.

EJEMPLO 03 **LA ROTACIÓN** de un vector $(x,y) \in I\!R^2$.

Al rotar el vector posición $\overrightarrow{OP}$ en sentido antihorario hasta tomar la posición $\overrightarrow{OP'}$ genera el ángulo θ, esta rotación define una transformación lineal. Veamos ¿Cómo explicar esta $t.\ell.$?



Las propiedades de esta transformación son:

a) Preserva el ángulo entre dos vectores.

b) Preserva la norma del vector.

Las coordenadas de $(x,y) \in I\!R^2$ son: $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

Las coordenadas de $(x',y') \in I\!R^2$ son: $\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\,\text{sen}\,(\alpha+\theta) \end{cases}$

Pero:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r[\cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta] \\ &= r\cos\alpha\cos\theta - r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ &= x\cdot\cos\theta - y\cdot\text{sen}\,\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y' &= r\,\text{sen}\,(\alpha+\theta) \\ &= r[\text{sen}\,\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\theta] \\ &= r\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ &= y\cos\theta + x\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Luego: $(x',y') = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, y\cos\theta + x\,\text{sen}\,\theta)$ .... (1)

$$(x',y') = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La igualdad (1) o (2) define una **TRANSFORMACION LINEAL** de $I\!R^2$ en $I\!R^2$, lo cual se puede expresar del siguiente modo:

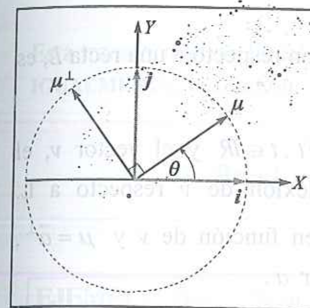
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$Tv = A_\theta \cdot v$$

siendo $v = (x,y)$, $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Es la matriz asociada a la transformación T.

Otra forma de deducir la transformación (3):



1. En el plano XY se tiene dos vectores canónicos $i = (1,0)$ y su ortogonal $j = (0,1)$ que constituyen la base canónica de $I\!R^2$.

2. Girar el vector i alrededor del origen un ángulo θ en sentido antihorario para obtener el vector unitario μ.

3. Las componentes del vector $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ son:

$$\mu_1 = |\mu|\cos\theta = \cos\theta$$
$$\mu_2 = |\mu|\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta \qquad , \qquad |\mu| = 1$$

Luego el vector μ es: $\mu = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ y su ortogonal es $\mu^\perp = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$

Así, hemos obtenidos dos bases ordenadas de $I\!R^2$, que son $A = \{i, j\}$ y $B\{\mu, \mu^\perp\}$

4. A continuación, hagamos corresponder un vector de la base A con un vector de la base B, mediante la función T, del siguiente modo: $i \longrightarrow \mu$, $j \longrightarrow \mu^\perp$

Es decir:
$$T(1,0) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$$
$$T(0,1) = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$$

5. Cualquier vector $v = (x,y) \in I\!R^2$ es combinación lineal de i y j.

Es decir: $\quad (x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1)$

Aplicar T: $\quad T(x,y) = T(x(1,0) + y\,(0,1))$

$= xT(1,0) + yT(0,1)$

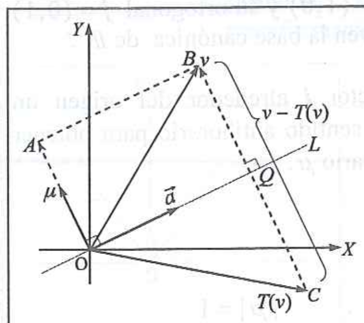
$= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y\,(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ .... según (3)

$= (x \cdot \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Conclusión: La rotación es una $t.\ell.$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $Tv = A_\theta \cdot v$ siendo A_θ la matriz asociada a T.

EJEMPLO 04 La reflexión de un punto $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con respecto a una recta L, es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.



1. Dado la recta $L: P = \vec{a}\,t, t \in \mathbb{R}$ y el vector v, el vector $T(v)$ es la reflexión de v respecto a L. Deseamos hallar $T(v)$ en función de v y $\mu = \vec{a}^{\perp}$, siendo conocido el vector $\vec{a}$.
2. El vector $v - T(v)$ es perpendicular a la recta L y Q es punto medio.
3. Se tiene: $\quad v = T(v) + 2\,\overrightarrow{QB}$
4. Pero $\qquad \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{OA} = \operatorname{Proy}_\mu v$
5. (4) en (3): $\qquad v = T(v) + 2\operatorname{Proy}_\mu v$

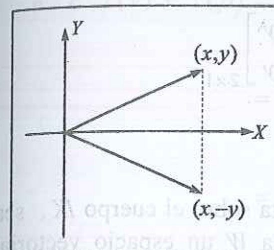
$$T(v) = v - 2\operatorname{Proy}_\mu v$$

$$\boxed{T(v) = v - 2\frac{v \cdot \mu}{|\mu|^2}\,\mu}$$

Conclusión: La función $T(v) = v - 2\dfrac{v \cdot \mu}{|\mu|^2}\,\mu$ es una $t.\ell.$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que expresa la reflexión de v con respecto a la recta $L: P = t\,\vec{a}, t \in \mathbb{R}$; donde $\mu = \vec{a}^{\perp}$.

Caso Particular: Probar que la reflexión del vector $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con respecto al EJE X, es $T(x,y) = (x,-y)$.

Solución:



La ecuación vectorial de la recta que contiene al eje X es $L: P = t(1,0)$, $t \in \mathbb{R}$; donde $\mu = \vec{a}^{\perp} = (0,1)$ y $v = (x,y)$.

Entonces: $\qquad T(v) = v - 2\dfrac{v \cdot \mu}{|\mu|^2}\,\mu$

$$T(x,y) = (x,y) - 2\frac{(x,y)\cdot(0,1)}{|(0;1)|^2}$$

$$\boxed{T(x,y) = (x,-y)}$$

Esta transformación lineal, expresa la reflexión de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con respecto al eje x.

IGUALMENTE, la función $\quad T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\qquad (x,y) \longrightarrow (-x,y)$

o $T(x,y) = (-x,y)$ **es una $t.\ell.$ que expresa la reflexión de (x,y) con respecto al eje Y.**

EJEMPLO 05 Sean los espacios vectoriales euclideanos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, X un vector de $\mathbb{R}^n$ y A una matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$

La función $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(X) = AX$, A es fijo; es una transformación lineal.

Pues, cumple la definición: $\quad T(\alpha X + Y) = A(\alpha X + Y)$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

$= \alpha AX + AY$

$= \alpha\, T(x) + T(y)$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

⟵ **Es matriz columna perteneciente a $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n\times 1}$**

Caso Particular:

Si $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$, entonces la función $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

es una $t.\ell.$ de IR^2 en IR^2. $=\begin{bmatrix} 2x-y \\ -8x+4y \end{bmatrix}_{2\times 1}$

3. TEOREMAS

TEOREMA 1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo IK, sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo IK y $w_1, \ldots, w_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T(v_i)=w_i \ , \quad i=1,2,\ldots,n .$$

Demostración:

Por demostración dos cosas: a) la existencia de la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ y b) la unicidad de T.

a) • Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de V, entonces dado un vector $v \in V$ existen "n" escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que:

$$v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

• Si $w_1, \ldots, w_n$ son vectores cualesquiera de W, entonces para el vector $v \in V$ se define:

$$T(v)=\alpha_1 w_1+\ldots+\alpha_n w_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

• Si en (1) aplicamos T, obtenemos:

$$T(v)=\alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{w_1}+\ldots+\alpha_n \underbrace{T(v_n)}_{w_n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

• Por (2) y (3) podemos afirmar que:

$T(v_i)=w_i$, para cada i. Ahora, probemos que T es lineal.

Veamos:

• Sea $\mu=\beta_1 v_1+\ldots+\beta_n V_n$ un vector de V y "c" cualquier escalar.

• Ahora $cv+\mu=(c\alpha_1+\beta_1)v_1+\ldots+(c\alpha_n+\beta_n)V_n \ldots\ldots\ldots (3)$

• Aplicar T: $T(cv+\mu)=(c\alpha_1+\beta_1)T(v_1)+\ldots+(c\alpha_n+\beta_n)T(V_n)$
$=(c\alpha_1+\beta_1)w_1+\ldots+(c\alpha_n+\beta_n)w_n \ldots\ldots\ldots (4)$

• Por otro lado: $cT(v)+T(\mu)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i+T(\beta_1 v_1+\ldots+\beta_n v_n)$

• $c: T(v)+T(\mu)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i+\beta_1 T(v_1)+\ldots+\beta_n T(v_n)$

$$=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i+\beta_1 w_1+\ldots+\beta_n w_n$$

$$=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i w_i$$

$$=\sum(c\alpha_i+\beta_i)w_i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

• Por (4) y (5): $T(cv+\mu)=cT(v)+T(\mu)$

b) Unicidad de T:

• **Si F es una $t.\ell.$ de V en W con $F(v_i)=w_i$, $i=1,\ldots,n$**

entonces para el vector $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ **se tiene**

$$F(v)=F\left(\sum\alpha_i v_i\right)$$
$$=\sum\alpha_i F(v_i)$$
$$=\sum\alpha_i w_i$$
$$=T(v) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{por } (2)$$

Como se podrá apreciar F es exactamente la misma correspondencia T que se definió antes, lo que demuestra que la $t.\ell.$ T con $T(v_i)=w_i$ es única. ■

ÁLGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sobre el conjunto de las transformaciones lineales de V en W, denotado por $L(V,W)=\{T: V\longrightarrow W, T \text{ es una } t.\ell.\}$, podemos definir dos operaciones: **a)** La suma de dos transformaciones lineales de V en W, y **b)** El producto de un escalar por una transformación lineal de V en W, dando así al conjunto $L(V,W)$ una estructura natural de espacio vectorial.

TEOREMA 2 Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$.

Sean $T: V \longrightarrow W$ y $F: V \longrightarrow W$ transformaciones lineales de V en W.

a) La función $(T+F): V \longrightarrow W$ definida por $(T+F)(v) = T(v) + F(v)$ es una transformación lineal de V en W.

b) Si $c \in I\!K$, la función

$cT: V \longrightarrow W$ definida por:

$(cT)(v) = c(T(v))$ es una transformación lineal de V en W, junto con la adición y la multiplicación escalar aquí definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!K$.

Demostración:

- Si T y F son *t.l.* de V en W y según la definición de $T+F$, tenemos:

a) $$\begin{aligned}(T+F)(\alpha v+\mu) &= T(\alpha v + \mu) + F(\alpha v + \mu)\\ &= \alpha T(v) + T(\mu) + \alpha F(v) + F(\mu)\\ &= \alpha T(v) + \alpha F(v) + T(\mu) + F(\mu)\\ &= \alpha(T+F)(v) + (T+F)(\mu)\end{aligned}$$

lo cual prueba que $T+F$ es una *t.l.*

b) De manera similar:

$$\begin{aligned}(cT)(\alpha v+\mu) &= c\,[T(\alpha v + \mu)]\\ &= c\,[T(\alpha v) + T(\mu)]\\ &= c\,[\alpha T(v) + T(\mu)]\\ &= c\alpha\, T(v) + cT(\mu)]\\ &= \alpha\,[cT](v) + [cT](\mu)\end{aligned}$$

Este resultado nos dice que (cT) es una transformación lineal.

TEOREMA 3 Sean V un subespacio vectorial de dimensión finita "n" sobre el cuerpo $I\!K$, y sea W un espacio vectorial de dimensión finita "m" sobre $I\!K$. Entonces el espacio $L(V,W)$ es de dimensión finita y tiene dimensión mn.

Demostración:

1. Sean $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente.

2. Para cada par de enteros (p,q) con $1 \le p \le m$ y $1 \le q \le n$ se define una transformación lineal

   $E^{p,q}$ de V en W por

   $$E^{p,q}(v_i) = \delta_{iq} w_p = \begin{cases} 0\ , & si\ \ i \ne q \\ w_p\ , & si\ \ i = q \end{cases}$$

   Los mn transformaciones $E^{p,q}$ forma una base de $L(V,W)$. Cada *t.l.* de la base está definida por:

$$E^{1,1}(v_1) = w_1\,, E^{1,2}(v_2) = w_1\,, \dots, E^{1,n}(v_n) = w_1$$
$$E^{2,1}(v_1) = w_2\,, E^{2,2}(v_2) = w_2\,, \dots, E^{2,n}(v_n) = w_2$$
$$\vdots$$
$$E^{m,1}(v_1) = w_m\,, E^{m,2}(v_2) = w_m\,, \dots, E^{m,n}(v_n) = w_m$$

3. Según el teorema 1, existe una transformación lineal única de V en W, que satisface las condiciones dadas.

   Sea T una transformación lineal de V en W definida por:

   $$T(v_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj} w_p \ \ \dots\dots\dots\dots\ (1)$$

   donde para cada j, $1 \le j \le n$ los escalares $A_{1j}, \dots, A_{mj}$ son las coordenadas del vector $T(v_j)$ en la base ordenada β'.

- Debemos demostrar que: $T = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq}\, E^{p,q}$ ....(2)

4. Sea F la *t.l.* del segundo miembro de (2). Entonces para cada j

$$F(v_j) = \sum_p \sum_q A_{pq}\, E^{p,q}(v_j) = \sum_p \sum_q A_{pq}\, \delta_{jq}\, w_p = \sum_{p=1} A_{pj}\, w_p = T(v_j)$$

y en consecuencia $F = T$. Pero en (2) se nos dice que los E^{pq} generan $L(V,W)$. Falta probar que son independientes.

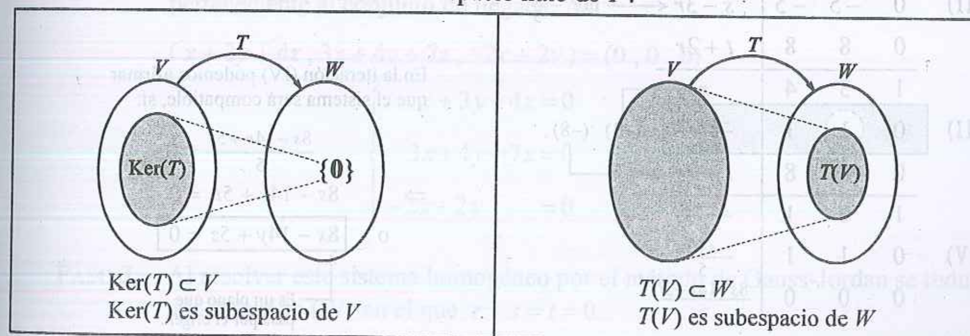
Veamos: S $F = \sum_p \sum_q A_{pq}\, E^{p,q}$ es la *t.l.* NULA, entonces $F(v_j) = 0$ para cada j, con lo que $\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\, w_p = 0$ y la independencia de los w_p implica que $A_{pj} = 0$, para todo p y j.

4. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES: NÚCLEO E IMAGEN

4.1 DEFINICIÓN 2.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$ y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces:

1. **EL NÚCLEO de T, (o el espacio nulo de T) denotado por $N(T)$ o $\text{Ker}(T)$, es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = 0$.**
   $N(T) = \text{Ker}(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = O\,,\, O \in W\}$
2. **La IMAGEN de T, denotado por $T(V)$ es el subespacio de W, definido por:**
   $Im(T) = T(V) = \{w \in W \,/\, w = T(v), \text{ para algún } v \in V\}$.
3. **Si V es de dimensión finita, el rango de T es la dimensión de la imagen de T y la nulidad de T es la dimensión del espacio nulo de T.**



$\text{Ker}(T) \subset V$
$\text{Ker}(T)$ es subespacio de V
$T(V) \subset W$
$T(V)$ es subespacio de W

4.2 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 01 Sea la $t.\ell.$ $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por la regla

$T(x,y,z) = (x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y)$

a) Hallar la **IMAGEN** de T

b) Hallar el **NÚCLEO** de T

c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la **IMAGEN** y el **NÚCLEO** de T, respectivamente?

Solución:

a) Cálculo de la **IMAGEN** de T

PASO 1: La imagen de T está formada por vectores de la forma (r,s,t) tal que:

$$(r,s,t) = \underbrace{(x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y)}_{T(v)}$$

El problema consiste en hallar los vectores (r,s,t) tal que exista una ecuación que las relacione.

PASO 2: Igualando las componentes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+3y+4z=r \\ 3x+4y+7z=s \\ -2x+2y \quad\ =t \end{cases}$$

PASO 3: Resolveremos el sistema por el método de Gauss-Jordán o cualquier otro método con el fin de encontrar una relación ecuacional entre las variables r, s, t.

(1) Por Gauss-Jordán

	①	3	4	r	(−3) (2)
(I)	3	4	7	s ←	
	−2	2	0	t ←	
	1	3	4	r	
(II)	0	−5	−5	$s-3r$ ←	por $-\frac{1}{5}$
	0	8	8	$t+2r$	
	1	3	4	r ←	
(III)	0	①	1	$\frac{-s+3r}{5}$	(−3) (−8)
	0	8	8	$t+2r$ ←	
	1	0	1	$\frac{3s-4r}{5}$	
(IV)	0	1	1	$\frac{-s+3r}{5}$	
	0	0	0	$\frac{8s-14r+5t}{5}$	

En la iteración (IV) podemos afirmar que el sistema será compatible, si:

$$\frac{8s-14r+5t}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8s - 14r + 5t = 0$$

o $\boxed{8x - 14y + 5z = 0}$ ← Es un plano que pasa por el origen.

(2) Por sumas y restas:

$$\begin{cases} x+3y+4z=r\ \ldots\ldots\ldots\ (1) \\ 3x+4y+7z=s\ \ldots\ldots\ldots\ (2) \\ -2x+2y \quad\ =t\ \ldots\ldots\ldots\ (3) \end{cases}$$

Resolver (1) y (2):

$$-3 \longrightarrow \begin{cases} x+3y+4z = r \\ 3x+4y+7z = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x-9y-12z = -3r \\ 3x+4y+7z = z \end{cases}$$

$$-5y - 5z = -3r + s$$

$$\boxed{y + z = \frac{3r-s}{5}}$$

Resolver (1) y (3):

$$2 \longrightarrow \begin{cases} x+3y+4z = r \\ -2x+2y \quad = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+6y+8z = 2r \\ -2x+2y+7z = t \end{cases}$$

$$8y + 8z = 2r + t$$

$$\boxed{y + z = \frac{2r+t}{8}}$$

← IGUALAR →

$$\frac{3r-s}{5} = \frac{2r+t}{8}$$

$$24r - 8s = 10r + 5t$$

$$0 = 8s - 14r + 5t$$

PASO 4: La imagen de T es $T(V) = \{(r,s,t) \in I\!R^3 \,/\, 8s - 14r + 5t = 0\}$ que geométricamente es un plano que pasa por el origen de coordenadas y por ende es un subespacio del conjunto de llegada $I\!R^3$.

b) Cálculo del **NÚCLEO** de T.

PASO 1: El núcleo de T se obtiene haciendo el vector. $w = (x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y)$ igual al vector **NULO** $(0,0,0)$ perteneciente al conjunto de llegada. Así:

$$(x + 3y + 4z\ ,\ 3x + 4y + 7z\ ,\ -2x + 2y) = (0\ ,0\ ,0)$$

$$\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+7z=0 \\ -2x+2y \quad\ =0 \end{cases}$$

PASO 2. Al resolver este sistema homogéneo por el método de Gauss-Jordan se reduce a la iteración (IV) en el que $r = s = t = 0$.

$$\text{(IV)}\quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Haciendo $z = t$, tendremos:
$$\begin{cases} x + t = 0 \Rightarrow x = -t \\ y + t = 0 \Rightarrow y = -t \end{cases}$$

Entonces el vector solución es $(x, y, z) = (-t, -t, t)$
$$= t(-1, -1, 1)$$

PASO 3 : El núcleo de T es $\text{Ker } T = \{v = (x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, x = -t, y = -t, z = t\}$ que representa la ecuación paramétrica de una recta en $I\!R^3$ que pasa por el origen de coordenadas.

PROBLEMA 02 Sea $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ una transformación lineal definida

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -8x & +4y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

¿Cuál de los siguientes vectores pertenece a la $Im\,(T)$?

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

¿Cuál de los siguientes vectores pertenece a $Ker(T)$?

d) (5 , 10) e) (3 , 2) f) (1 , 1)

Solución:

1. En primer lugar, hallar la imagen de T.
   La imagen de T está constituida por todas las matrices de orden 2×1 de la forma:

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \text{ tal que } \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2x - y \\ -8x + 4y \end{bmatrix}}_{T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)}$$

El problema consiste en hallar la forma de las matrices $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$.

2. Igualando componentes: $\begin{cases} 2x - y = r \\ -8x + 4y = s \end{cases}$

Debemos hallar una ecuación que relaciona las variables r, s.

Al resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y = r \longleftarrow \text{por } 4 \\ -8x + 4y = s \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x - 4y = 4r \\ -8x + 4y = s \end{cases}$$
$$0 + 0 = 4r + s$$
$$\boxed{0 = 4r + s}$$

Esto indica que la imagen de T está formado por los vectores $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ que guardan la relación $4r + s = 0$.

Es decir: $Im\,(T) = \left\{\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in I\!R^{2\times 1} / 4r + s = 0\right\}$ ⟵ Es una recta de $I\!R^2$ que pasa por el origen.

Ahora , comprobemos si los vectores dados en a) , b) y c) pertenecen o no a la $Im\,(T)$

a) El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ satisface la ecuación $4r + s = 0$ pues: $4(1) - 4 = 0$,

por tanto $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$

b) El vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \notin \text{Im}(T)$,

porque $4(5) + 10 \neq 0$

c) El vector $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$,

porque $4(-3) + 12 = 0$

PROBLEMA 03 Sea $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definido por $T(x,y) = (2x - y\,, -8x + 4y)$ una $t.\ell.$
¿Cuál de los siguientes vectores pertenecen a Ker(T)?

a) (5 , 10) b) (3 , 2) c) (1 , 1)

Solución:

Por definición de NÚCLEO de T, tenemos: $\text{Ker}(T) = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, T(x,y) = (0,0)\}$

Como $T(x,y) = (2x - y, -8x + 4y)$, entonces $(2x - y, -8x + 4y) = (0,0)$

$$(\alpha) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases}$$

Resolver el sistema (α) por el método de Gauss-Jordan

(4) ⟶ 2	−1	0
↳ −8	4	0
(*) ⟶ 2	−1	0
0	0	0

Tenemos: $\rho(A) = \rho[A:B] = 1$, entonces el sistema es compatible.
Como $n = 2$ y $\rho(A) = 1$, entonces el número de parámetros es $k = 2 - 1 = 1$

De (*): obtenemos la ecuación $2x - y = 0$

Por tanto, el $\ker(T) = \{(x,y) \in IR^2 / 2x - y = 0\}$

Ahora, respondemos a las preguntas: d) $(5,10) \in \ker(T)$, porque $2(5) - 10 = 0$
e) $(3,2) \notin \ker(T)$ f) $(1,1) \notin \ker(T)$.

PROBLEMA 04 Defina una *t.l.* $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ cuyo núcleo sea la recta $y = x$, y su imagen sea la recta $y = 2x$.

Solución:

Sea $T(x,y) = (ax + by, mx + ny)$. Por hallarse: a, b, m, n.

a) Núcleo de $T: x - y = 0$

Por definición de NÚCLEO, se tiene:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ mx + ny = 0 \end{cases}$$

por $\frac{1}{a}$ ⟶ a	b	0
m	n	0
┌(−m) ①	$\frac{b}{a}$	0
└⟶ m	n	0
1	$\frac{b}{a}$	0
0	$n - \frac{mb}{a}$	0

Debe ser que:

$$\begin{cases} n - \frac{mb}{a} = 0 \\ \frac{b}{a} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} an - mb = 0 \quad \text{............ (1)} \\ a + b = 0 \quad \text{............ (2)} \end{cases}$$

$Im(T): 2r - s = 0$

Por definición de imagen, se tiene:

$$\begin{cases} ax + by = r \\ mx + ny = s \end{cases}$$

a	b	r ⟵ por 2
m	n	s ⟵ por −1
$2a$	$2b$	$2r$ ┐ +
$-m$	$-n$	$-s$ ⟵┘
$2a$	$2b$	$2r$
$2a - m$	$2b - n$	$2r - s$

Debe ser que:

$$\begin{cases} 2a - m = 0 \text{ ...... (3)} \\ 2b - n = 0 \text{ ...... (4), si } 2r - s = 0 \end{cases}$$

De (2) : $a = -b$
De (4) : $n = 2b$
De (2) y (3) : $m = -2b$

CONCLUSIÓN: $T(x,y) = (-bx + by, -2bx + 2by)$,
$= (x - y, 2x - 2y)$, si $b = -1$.

PROBLEMA 05 Sea la base $S = (v_1, v_2, v_3)$ de IR^3, donde: $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,5,3)$ y $v_3 = (1,0,10)$

a) Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal $T: IR^3 \longrightarrow IR^2$, sabiendo que $T(v_1) = (1,0)$, $T(v_2) = (1,0)$, $T(v_3) = (0,1)$.

b) Calcular $T(1,1,1)$.

Solución de a)

1. Sea $V = (x,y,z) \in IR^3$

Como S es una base de IR^3, entonces v es combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3 ; es decir existen escalares α_1, α_2, α_3 tal que:

2. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$(x,y,z) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(2,5,3) + \alpha_3(1,0,10)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = y \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 10\alpha_3 = z \end{cases}$$

Resolver el sistema, por el método de Gauss-Jordan para hallar α_1, α_2, α_3 en términos de x, y, z.

①	2	1	x	(−2) (−3)
2	5	0	y	
3	3	10	z	
1	2	1	x	
0	①	−2	$y - 2x$	(−2) (3)
0	−3	7	$z - 3x$	
1	0	5	$-2y + 5x$	
0	1	−2	$y - 2x$	
0	0	①	$3y + z - 9x$	(2) (−5)
1	0	0	$-17y - 5z + 50x$	
0	1	0	$7y + 2z - 20x$	
0	0	1	$3y + z - 9x$	

Por tanto:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -17y - 5z + 50x \\ \alpha_2 = 7y + 2z - 20x \\ \alpha_3 = 3y + z - 9x \end{cases}$$

3. Aplicar T en 2:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)$$
$$= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3)$$
$$= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,0) + \alpha_3(0,1)$$
$$= (-17y - 5z + 50x)(1,0) + (7y + 2z - 20x)(1,0) + (3y + z - 9x)(0,1)$$
$$T(x,y,z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$$

b) $T(1,1,1) = (30 - 10 - 3, -9 + 3 + 1)$
$= (17, -5)$

PROBLEMA 06 Suponga que $T: M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$ se define por $T(A) = A - A'$.
Muestre que:

a) Ker(T) = {matrices simétricas de $n \times n$}
b) Im (T) = {matrices antisimetricas de $n \times n$}

Solución:

a) $\text{Ker}(T) = \{A \in M_{nn} / T(A) = 0, 0 \in M_{nn}\}$

Como $T(A) = A - A'$
$A - A' = 0$
$A = A'$ ← Esta igualdad indica que A es simétrica.

Luego $\text{Ker}(T) = \{A \in M_{nn} / A = A'\}$
= matrices simétricas de $n \times n$.

b) $\text{Im}(T) = \{B \in M_{nn} : \exists A \in M_{nn}, B = T(A)\}$

Entonces:
$B = A - A'$ .... (1)
$B' = A' - A$ .... (2)

(1) + (2): $B + B' = 0$
$B = -B'$

Luego: $\text{Im}(T) = \{B \in M_{nn} : B = -B'\}$
que es el conjunto de matrices antisimétricas.

5. MONOFORMISMO, EPIMORFISMO E ISOMORFISMO.

Sea la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$

DEFINICIÓN 3:

a) T es inyectiva (o un monomorfismo) si, y sólo si,
$\forall \mu, v \in V$; $T(\mu) = T(v)$ implica $\mu = v$.
Otra definición equivalente es:
T es inyectiva $\Longleftrightarrow \forall \mu, v \in V$; $\mu \neq v$ implica $T(\mu) \neq T(v)$,

b) T es un sobreyectiva (sobre, epiyectiva o epimorfismo)
si, y sólo si, para todo $w \in W$, existe algún $v \in V$, tal que $w = T(v)$
Otra definición equivalente es:
T es sobreyectiva si, y sólo si $\text{Im}(T) = W$

c) T es un isomorfismo si, y sólo si T es sobreyectiva e inyectiva.
En este caso afirmamos que V es isomorfo a W.

Notación: La notación $V \cong W$ se lee "V es isomorfo a W".

Ejemplo:
$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, porque existe $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x,y) \longrightarrow x + iy$, $i = \sqrt{-1}$
definido por $T(x,y) = x + iy$

Ejemplo:
Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_2 = \{a + bx + cx^2 / a, b, \in \mathbb{R}\}$
se tiene que $V \cong \mathbb{P}_2$, pues existe un isomorfismo
$T: V \longrightarrow \mathbb{P}_2$ definido por $T(a,b,c) = a + bx + cx^2$.

Ejemplo:
Si A es matriz cuadrada de orden n, la transformación lineal
$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $T(X) = AX$ es un isomorfismo.

Ejemplo:
Si $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, también $\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{\mathbb{R}^{2n}} \cong \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{\cong \mathbb{C}^n}$

TEOREMA 4 Una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$, es **INYECTIVA** sí, y sólo si $N(T) = \{\mathbf{O}\}$, $\mathbf{O} \in W$.
↑ Núcleo de T.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si T es inyectiva $\Rightarrow N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, $\mathbf{0}_V$: vector nulo d V.

Veamos:

Si $v \in N(T) \Rightarrow T(v) = \text{O}_W$ .... (1)

Debo probar que $v = O_V$, donde $\text{O}_V \in V$

Como $N(T)$ es subespacio de V, se cumple:

$\text{O}_W = T(\text{O}_V)$ .... (2)

(2) en (1): $T(v) = T(\text{O}_V)$

Pero, T es inyectiva $\Rightarrow v = \text{O}_V$.

($\Leftarrow$) Si $N(T) = \{O_V\} \Rightarrow T$ es inyectiva.

Sea $N(T) = \{O_V\}$, entonces $T(\mu) = T(v)$

$\Rightarrow T(\mu) - T(v) = O_W \Rightarrow T(\mu - v) = O_W$

$\Rightarrow \quad \mu - v = O_V \Rightarrow \mu = v.$ ■

- Se dice que la transformación lineal T es no singular si $Tv = 0$ implica $v = 0$, es decir, si el espacio nulo de T es $\{0\}$. Evidentemente, T es inyectiva si, y solo si, T es no singular. El alcance de esta observación es que las transformaciones lineales no singulares son las que preservan la independencia lineal.

5.1 PROBLEMAS.

PROBLEMA 01 Sea $E = C^o(I\!R)$ el espacio de las funciones continuas $f : I\!R \longrightarrow I\!R$.

Defina el operador lineal $A : E \longrightarrow E$ poniendo, para cada $f \in E$, $Af = Q$, donde $Q(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in I\!R$. Determine el núcleo y la imagen del operador A.

Solución:

a) **NÚCLEO** de A: es el conjunto de las funciones f tal que $\int_0^x f(t)dt = 0 \Rightarrow f(x) = 0$,

$x \in I\!R$. Entonces $N(A) = \{ f \in E \,/\, f(x) = 0 , x \in I\!R \}$.

b) **IMAGEN** de A: es el conjunto de las funciones $Q(x)$ tal que

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ , del cual se obtiene:}$$

$$Q'(x) = f(x).$$

Entonces $Im(A) = \{Q(x) \,/\, Q'(x) = f(x) , x \in I\!R \}$

PROBLEMA 02 Sea la transformación lineal $T : V_2 \longrightarrow V_2$ definida por: $T(x,y) = (2x - y , x + y)$

a) ¿Es T inyectiva?

b) Hallar la inversa de T, si existe.

Solución:

a) Si $N(T) = \{O\}$, $O \in V_2 \Rightarrow T$ es inyectiva.

Veamos:

1. El núcleo de T es $N(T) = \{(x,y) \in V_2 \,/\, T(x,y) = (0,0)\}$

2. Como $T(x,y) = (2x - y , x + y)$, entonces:

$$(2x - y , x + y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$3x = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}}$$

3. ***Conclusión***: $N(T) = \{(0,0)\}$, **esto implica que T es inyectiva.**

b) Como T es **inyectiva**, tiene inversa

La inversa de T se obtiene haciendo $\begin{cases} 2x - y = s \\ x + y = t \end{cases}$ y resolver el sistema de tal modo que "x" e "y" estén expresadas de una única manera en términos de s y t.

Por determinantes: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{s+t}{3}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & s \\ 1 & t \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{2t - s}{3}$

Luego, la inversa de T es $T^{-1} : V_2 \longrightarrow V_2$, definido por:

$T^{-1}(s,t) = \left(\frac{s+t}{3} , \frac{2t-s}{3} \right)$ como s y t son variables se puede sustituir por x e y

$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{3} , \frac{2y-x}{3} \right)$.

NOTA: Se cumple: T^{-1} o $T = I$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ son las matrices asociadas a T y T^{-1}, respectivamente.

PROBLEMA 03 Sea la aplicación (función) $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ tal que; T es una transformación lineal.

Probar que, T es inyectiva $\Longleftrightarrow \{T(1,0) , T(0,1)\}$ es $\ell.i.$

Solución:

($\Rightarrow$) Si T es **INYECTIVA** $\Rightarrow \{T(1,0) , T(0,1)\}$ es $\ell.i.$

1. Sea $\underbrace{\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1)}$ = (0,0). Debo probar: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2. $T(\alpha(1,0) + \alpha(0,1)) = (0,0)$ .... porque T es $t.\ell.$

3. $T(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

   Esta igualdad implica que $(\alpha_1, \alpha_2) \in N(T)$

4. Según hipótesis, T es inyectiva $\Rightarrow$ $N(T) = \{(0,0)\}$

5. Si $(\alpha_1, \alpha_2) \in N(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

6. **CONCLUSIÓN.**
   Según 1 y 5, afirmamos que el conjunto de vectores $\{T(1,0), T(0,1)\}$ es $\ell.i.$
   $(\Leftarrow)$ si $T(1,0)$, $T(0,1)$ es $\ell.i.$ $\Rightarrow$ T es inyectiva

Prueba:

1. Si $\{T(1,0), T(0,1)\}$ es $\ell.i.$ entonces la igualdad:
   $\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1) = (0,0)$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
   Bastará probar que $N(T) = \{(0,0)\}$, para afirmar que T es inyectiva.

2. De 1: $\alpha_1 T(1,0) + \alpha_2 T(0,1) = (0,0)$
   Obtenemos: $T(\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)) = (0,0)$
   $T(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

3. Por (1) se tiene $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Entonces $N(T) = \{(0,0)\}$.

4. Entonces T es **inyectiva**.

PROBLEMA 04 Sean los conjuntos: $U = \{f(x) = a + bx^2 + cx^4 \,/\, a, b, c, \in I\!R\}$
$V = \{(p, r, s, t) \in I\!R^4 \,/\, p + r + s + t = 0\}$

Donde U y V son $I\!R$ – espacios vectoriales. Sea la $t.\ell.$ $T: U \longrightarrow V$ definido por $T(a + bx^2 + cx^4) = (a-b, b-c, 2c-a, -c)$. Demostrar que T es un **ISOMORFISMO.**

Demostración:

Debo demostrar que a) T es **INYECTIVA.**
b) T es **SURYECTIVA.**

a) Si se prueba que $N(T) = \{O\}$, $O = 0 + 0x^2 + 0x^4 \Rightarrow T$ es inyectiva.

Veamos:

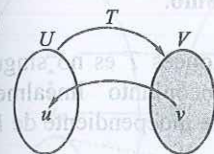
1. Por definición $N(T) = \{f(x) \in U / T(f) = (0,0,0,0)\}$, $f(x) = a + bx^2 + cx^4$
   Como $T(a + bx^2 + cx^4) = (a-b, b-c, 2c-a, -c)$
   hacemos: $(a-b, b-c, 2c-a, -c) = (0,0,0,0)$ $\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ 2c-a=0 \\ -c=0 \end{cases}$

2. Al resolver, obtenemos $a = b = c = 0$

3. Así hemos obtenido el polinomio **nulo** $0 = 0 + 0x^2 + 0x^4$

4. Por tanto: $N(T) = \{\mathbf{0}\}$, lo cual implica que T es inyectiva.

b) T es suryectiva si, y sólo si $\forall\, v \in V$, $\exists\, u \in U$ tal que $v = T(u)$.



1. La definición de Suryectividad, se interpreta del siguiente modo:
   Dado $v = (p, r, s, t) \in V$ encontrar $u(x) = a + bx^2 + cx^4 \in U$, tal que:
   $T(u) = \underbrace{(p, r, s, t)}_{v}$

2. Pero $T(u) = (a-b, b-c, 2c-a, -c)$
   entonces $(a-b, b-c, 2c-a, -c) = (p, r, s, t)$

3. Basta hacer:

$$(\alpha)\begin{cases} a-b = p & \text{........... (1)} \\ b-c = r & \text{........... (2)} \\ 2c-a = s & \text{........... (3)} \\ c = t & \text{........... (4)} \end{cases}$$

4. Según la definición dado en 1, nuestro problema es hallar $a = ?$, $b = ?$, $c = ?$ en términos de p, r, s, t tal que se cumpla $p + r + s + t = 0$

5. Al resolver el sistema (α) obtenemos:
   De (4): $c = -t$
   Sustituir en (3): $-2t - a = s$
   $a = -s - 2t$ .... (5)
   (5) en (2): $b + t = r$
   $b = r - t$ .... (6)
   (6) y (5) en (1): $-s - 2t - r + t = p$
   $-s - t - r = p$

6. Así hemos encontrado que $u(x) = \underbrace{(-s-2t)}_{a} + \underbrace{(r-t)}_{b}\, x^2 + \underbrace{(-t)}_{c}\, x^4$, tal que:

$$T(\underbrace{\underbrace{(-s-2t)}_{a} + \underbrace{(r-t)}_{b}\, x^2 + \underbrace{(-t)}_{c}\, x^4}_{u}) = (\underbrace{(-s-2t)}_{a} - \underbrace{(r-t)}_{b} , \underbrace{(r-t)}_{b} - \underbrace{(-t)}_{c} , \underbrace{2(-t)}_{2a} - \underbrace{(-s-2t)}_{a} , \underbrace{-(-t)}_{-c})$$

$$= (-s-t-r , r , s , t)$$

$$= (p , r , s , t)$$

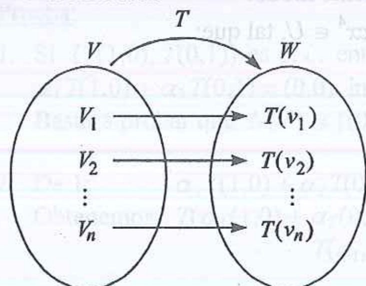
$$T(\mu) = v$$

7. Luego, T es suryectiva

8. Porque T es inyectiva y suryectiva implica que T es un **isomorfismo.**

TEOREMA 5 Sea T una transformación lineal de V en W. Entonces T es no singular (inyectiva) si, y solo si, T aplica cada subconjunto linealmente independiente de V sobre un subconjunto linealmente independiente de W.

Demostración:



Sea $S = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ un subconjunto de V, linealmente independiente y $\{T(v_1), \ldots , T(v_n)\}$ el subconjunto de W, que son las imágenes de los vectores $v_1 , \ldots , v_n$.

($\Rightarrow$) T es inyectiva $\Rightarrow (v_1 , \ldots , v_n$ son $\ell.i.$ implica $T(v_1) , \ldots , T(v_n)$ son $\ell.i.)$

Debo probar que $x_1\, T(v_1) + x_2\, T(v_2) + \ldots + x_n\, T(v_n) = 0$ implica $x_i = 0 \;\; \forall\, i$

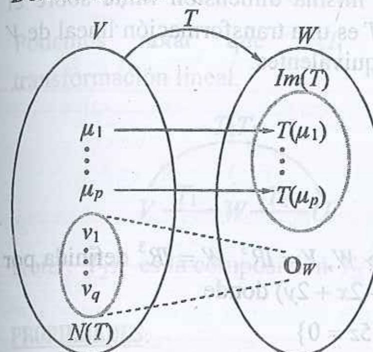
Veamos:

1. Sean los escalares $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ tales que:
   $x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \ldots + x_n\, T(v_n) = \mathbf{0}_W$
2. $T(x_1\, v_1 + \ldots + x_n\, v_n) = \mathbf{0}_W$, porque T es una $t.\ell.$
3. Como T es inyectiva, entonces: $x_1\, v_1 + \ldots + x_n\, v_n = \mathbf{0}_V$, porque T es inyectiva.
4. Por hipótesis $v_1 , \ldots v_n$ son $\ell.i.$, entonces la igualdad en 3 implica que:
   $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \mathbf{0}.$
5. Por 1 y 4 implica que $T(v_1), T(v_2), \ldots , T(v_n)$ son $\ell.i.$ *lqqd.*

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ lleva vectores $\ell.i.$ en vectores $\ell.i.$, entonces $v \neq \mathbf{O}$ en $V \Rightarrow \{v\}\; \ell.i. \Rightarrow \{T(v)\}\; \ell.i. \Rightarrow T(v) \neq \mathbf{O}$, por tanto $N(T) = \{\mathbf{O}\}$ y T es inyectiva.

TEOREMA 6 **(TEOREMA DEL NÚCLEO Y DE LA IMAGEN)**
Sea V un $I\!K$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces: $\dim V = \underbrace{\dim N(T)}_{\text{rango}(T)} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(T)}_{\text{nulidad}(T)}$

Demostración:



Si $\{T(\mu_1), \ldots , T(\mu_p)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ y $\{v_1 , \ldots , v_q\}$ es una base de V, se debe probar dos cosas:

a) $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_q$ son $\ell.i.$

b) Todo vector v, de V es combinación lineal de los vectores $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_q$

Veamos:

Prueba de a)

1. Supongamos que: $\alpha_1\, \mu_1 + \ldots + \alpha_p\, \mu_p + \beta_1\, v_1 + \ldots + \beta_q\, v_q = \mathbf{O}$
2. Aplicar T: $T(\alpha_1\, \mu_1 + \ldots + \alpha_p\, \mu_p + \beta_1\, v_1 + \ldots + \beta_q\, v_q) = T(\mathbf{O})$
   $\underbrace{\alpha_1\, T(\mu_1) + \ldots + \alpha_p\, T(\mu_p)} + T(\beta_1\, v_1 + \ldots + \beta_q\, v_q) = \mathbf{O}_W$
3. Como $T(\mu_1) , \ldots , T(\mu_p)$ es una base de la $Im(T)$, entonces son $\ell.i.$ y por tanto:
   $\alpha_1 T(\mu_1) + \ldots + \alpha_q T(\mu_p) = \mathbf{O}_W$
   Luego, en 2, se tendrá: $\mathrm{O}_W + T(\beta_1\, v_1 + \ldots + \beta_q\, V_q) = \mathbf{O}_W$
   $\Rightarrow \quad T(\beta_1\, v_1 + \ldots + \beta_q\, V_q) = \mathbf{O}_W$ ………………… (3*)
4. La igualdad (3*) implica que $(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q) \in N(T)$
5. Pero $\{v_1 , \ldots v_q\}$ es una base del $N(T)$, entonces son $\ell.i.$ y por lo tanto $\beta_1 = \ldots = \beta_q = \mathbf{O}$
6. Por 3 y 5 afirmamos que $\mu_1 , \ldots , \mu_p , v_1 , \ldots , v_p$ son $\ell.i.$

Prueba de b)

7. Sea $v \in V$ un vector arbitrario. Como $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$, podemos escribir:
   $T(v) = \alpha_1 T(\mu_1) + \ldots + \alpha_p T(\mu_p)$, porque $\{T(\mu_1) , \ldots T(\mu_p)\}$ es una base de la imagen de T.

La igualdad anterior implica $T(v-(\alpha_1\mu_1+\ldots+\alpha_p\mu_p))=0_W$

Esta igualdad implica que $v-(\alpha_1\mu_1+\ldots+\alpha_p\mu_p)$ pertenece al núcleo de T y por tanto, se puede expresar como combinación lineal de los elementos de la base $\{v_1,\ldots v_q\}$, esto es, $v-(\alpha_1\mu_1+\ldots+\alpha_p\mu_p)=\beta_1v_1+\ldots+\beta_q v_q$.

Luego, $v=\alpha_1\mu_1+\ldots+\alpha_p\mu_p+\beta_1v_1+\ldots+\beta_qv_q$.

8. Esto prueba que $\mu_1,\ldots,\mu_p$, $v_1,\ldots,v_q$ genera V y por tanto, constituye una base.

TEOREMA 7 Sean V, W espacios vectoriales de la misma dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ tal que $\dim V=\dim W$. Si T es una transformación lineal de V en W, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) T es inversible.
(*ii*) T es no singular.
(*iii*) T es sobreyectiva; esto es, la imagen de T es W.

Demostración: (queda como ejercicio)

Ejemplo 06 Sea la transformación lineal $T: V\longrightarrow W$, $V=I\!R^3$, $W=I\!R^3$ definida por $T(x,y,z)=(x+3y+4z\,,\,3x+4y+7z\,,\,-2x+2y)$ donde

a) $\operatorname{Im}(T)=\{(x,y,z)\in W\,/\,14x-8y-5z=0\}$
b) $N(T)=\{(x,y,z)\in V\,/\,x=-t\,,\,y=-t\,,\,z=t\}$

Comprobar que: $\dim V=\dim \operatorname{Im}(T)+\dim N(T)$

Solución:

1. Se tiene que: $\dim V=3$, porque $V=I\!R^3$
2. Hallemos la dimensión de $\operatorname{Im}(T)$

De $\quad 14x-8y-5z=0 \;\Rightarrow\; z=\frac{14}{5}x-\frac{8}{5}y$

Entonces $\quad (x,y,z)=\left(x\,,\,y\,,\,\frac{14}{5}x-\frac{8}{5}y\right)$

$$=\left(1,0,\tfrac{14}{5}\right)+y\left(0,1,-\tfrac{8}{5}\right)$$

Luego $\quad \operatorname{Im}(T)=\mathcal{L}\left\{\left(1,0,\tfrac{14}{5}\right)+y\left(0,1,-\tfrac{8}{5}\right)\right\}$ y $\dim \operatorname{Im}(T)=2$

3. Hallemos la dimensión de $N(T)$:

Los vectores $(x,y,z)\in N(T)$ son de la forma: $(x,y,z)=(-t,-t,t)$
$$=t(-1,-1,1)$$
Así tenemos: $N(T)=\mathcal{L}\{(-1,-1,1)\}$ y $\dim N(T)=1$.

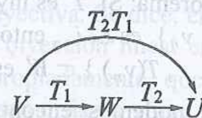
4. Se cumple: $\underbrace{3}_{\dim V}=\underbrace{2}_{\dim \operatorname{Im}(T)}+\underbrace{1}_{\dim N(T)}$

5.2. PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Dadas las transformaciones lineales $T_1: V\to W$ y $T_2: W\to U$ tales que el dominio de T_2 coincide con el contra-dominio de T_1, se define el producto

$T_2T_1: V\longrightarrow U$ poniendo para cada $v\in V$, $(T_2T_1)(v)=T_2(T_1(v))$.

Podemos notar que T_2T_1 es una transformación lineal.



Nota: T_2T_1 es la composición $T_2\circ T_1$.

PROPIEDADES:

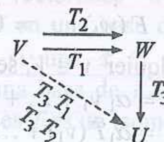
P_1. Dado tres transformaciones lineales

$$V\xrightarrow{T_1} W\xrightarrow{T_2} U\xrightarrow{T_3} Z$$

se cumple la asociatividad:

$$(T_3T_2)\,T_1=T_3\,(T_2T_1)$$

P_2. Dado tres transformaciones lineales definidas del siguiente modo:

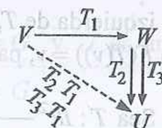


se cumple la distributividad a derecha:

$$T_3\,(T_1+T_2)=T_3\,T_1+T_3\,T_2$$

P_3. **Distributividad a izquierda:**

Dadas las transformaciones lineales T_1, T_2 y T_3 definidas del siguiente modo.



Se cumple:

$$(T_2+T_3)\,T_1=T_2T_1+T_3T_1$$

P_4. **Homogeneidad:**

$$T_2\,(\alpha\,T_1)=\alpha\,(T_2\,T_1)$$

P_5. **Elementos neutros para la multiplicación:**

Dada la transformación lineal

$T: V\longrightarrow W$, se tiene

$TI_v=T=I_wT$, donde las aplicaciones identidad

$$I_v: V\longrightarrow V\ ;\ I_W: W\longrightarrow W$$

son elementos neutros para la multiplicación por derecha e izquierda, respectivamente.

TEOREMA 8 Si A es una matriz $m\times n$ con elementos a_{ij} en el cuerpo $I\!K$, entonces

rango de filas (A) = rango de columnas (A).

Demostración: queda como ejercicio.

5.2.1 LA INVERSA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 4.

Sean $T: V \longrightarrow W$ y $F: W \longrightarrow V$ transformaciones lineales. Se dice que F es una inversa a izquierda de T, si $FT = I_V$, es decir, cuando $F(T(v)) = v$, para todo $v \in V$.

Ejemplo.- Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x - y, 3x + 2y, 2x + 4y)$.

La transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$F(x,y,z) = \left(\tfrac{2}{7}x + \tfrac{1}{7}y, -\tfrac{3}{7}x + \tfrac{2}{7}y\right)$$

cumple la relación:

$$F(T(x,y)) = \left(\tfrac{2}{7}(2x-y) + \tfrac{1}{7}(3x+2y), -\tfrac{3}{7}(2x-y) + \tfrac{2}{7}(3x+2y)\right) = (x, y)$$

para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces F es una inversa a izquierda para T.

Ejemplo.- Una transformación lineal puede admitir infinitas inversas a izquierda. Por ejemplo consideremos $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x, 3y, 0)$, la transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}x + az, \tfrac{1}{3}y + bz\right)$ es una inversa a izquierda de T para todo a, b en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 9 Sea V un W espacios vectoriales de dimensión finita. La transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tiene inversa a izquierda si, y sólo si, es inyectiva.

Demostración:

($\Rightarrow$) Por demostrar: T tiene inversa a izquierda implica T es inyectiva.

- Sea $F: W \longrightarrow V$ la inversa a izquierda de T, entonces $T(\mu) = T(v)$ implica $\mu = F(T(\mu)) = F(T(v)) = v$, luego T es inyectiva.

($\Leftarrow$) T inyectiva implica $F(T(v)) = v$,

- Elegir una base $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.
- Por un teorema: Si T es inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \subset W$ es $\ell.i.$
- Entonces podemos encontrar vectores $w_1, \ldots w_k \in W$ tales que: $\{T(v_1), \ldots, T(v_n), w_1, \ldots, w_k\} \subset W$ sea una base [Por otro teorema: Todo conjunto $\ell.i.$ en W está contenido en una base].
- Por un teorema, para poder definir la transformación lineal: $F: W \longrightarrow V$ bastará hacer la siguiente correspondencia.

$$\begin{aligned} F(T(v_1)) &= v_1 \\ &\vdots \\ F(T(v_n)) &= v_n \\ F(w_1) &= 0 \\ &\vdots \\ F(w_k) &= 0 \end{aligned}$$

- Dado cualquier $v \in V$, se tiene:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$
y $$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$$

- A su vez:

$$\begin{aligned} F(T(v)) &= F(\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)) \\ &= \alpha_1 F(T(v_1)) + \ldots \alpha_n F(T(v_n)) \\ &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = v \end{aligned}$$

Esto prueba que F es una inversa a izquierda de T. □

Definición 5.

Una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ se llama inversible cuando existe otra transformación $F: W \longrightarrow V$ tal que $FT = I_V$ y $TF = I_W$. Esto es, si F es inversa a izquierda y a derecha de T, a la vez.

En este caso, se dice que F es la inversa de T y se escribe $F = T^{-1}$.

- Para que una $t.\ell.$ sea inversible, es necesario y suficiente, que sea inyectiva y sobreyectiva. Se dice, entonces, que T es una biyección lineal entre V y W o, más apropiadamente, que $T: V \longrightarrow W$ es un isomorfismo y que los espacios V y W son isomorfos.
- Si $T: V \longrightarrow W$ y $F: W \longrightarrow U$ son isomorfismos, entonces: $T^{-1}: W \longrightarrow V$ y $FT: V \longrightarrow U$ también son isomorfismos.

  Se tiene $(FT)^{-1} = T^{-1}F^{-1}$
  y para $\alpha \neq 0$, $(\alpha T)^{-1} = \frac{1}{\alpha}T^{-1}$
- Un isomorfismo $T: V \longrightarrow W$ entre espacios vectoriales transforma una base de V en una base de W. Recíprocamente, si una $t.\ell.$ $T: V \longrightarrow W$ lleva alguna base de V en una base de W, entonces T es un isomorfismo.
- V y W son isomorfos si, y sólo si $\dim V = \dim W$.

TEOREMA 10

Si una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tiene inversa a izquierda $F: W \longrightarrow V$ y una inversa a derecha $G: W \longrightarrow V$ entonces $F = G$ y T es un isomorfismo, con $T^{-1} = F = G$.

Demostración:

Se tiene $FT = I_V$ y $TG = I_W$

Por tanto:

$$F = FI_W = F(TG) = (FT)G = I_V\, G = G.$$

COROLARIO

Sea $\dim V = \dim W$. Si las transformaciones lineales $T: V \longrightarrow W$, $F: W \longrightarrow V$ son tales que $FT = I_V$ entonces $TF = I_W$ y $F = T^{-1}$.

Demostración:

Se tiene:

$FT = I_V \Rightarrow T$ es inyectiva

$\Rightarrow T$ sobreyectiva ... (consecuencia del Teorema 6, cuando $\dim V = \dim W$))

$\Rightarrow TG = I_W$ para alguna $G \Rightarrow G = F$ (Teo. 10)

$\Rightarrow TF = I_W$.

TEOREMA 11 Sea $T: V \longrightarrow W$ un isomorfismo.

Se cumplen:

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera W.
2. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es $\ell.i.$ en W.
3. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base en W.
4. Si V es de dimensión finita, entonces W es de dimensión finita y $\dim V = \dim W$.

Demostración:

Si T es un isomorfismo, entonces T es suryectiva e inyectiva.

1. Debo probar que cualquier vector $w \in W$ es combinación lineal de los vectores imágenes $T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)$.

   $\forall\, w \in W$

   Como T es sobreyectiva, entonces para cualquier $w \in W$, existe un $v \in V$, tal que $w = T(v)$.

   Por hipótesis, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V, por tanto, existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que:
   $$v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$$

   Aplicar T: $T(v) = T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)$
   $$w = a_1\,T(v_1) + \ldots + a_n\,T(v_n)\ ,\ \forall\, w \in W.$$

   Esta igualdad nos dice que todo vector $w \in W$ es combinación lineal de los vectores $\{T(v_1), T(v_2), \ldots\ldots, T(v_n)\}$. Es decir $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ genera W. □

2. Debo probar que $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots\ldots + a_nT(v_n) = 0$ implica $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

   Veamos:

   Supongamos que $a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots\ldots + a_nT(v_n) = 0$

   $\Rightarrow\ T(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n) = 0$, porque T es $t.\ell.$

   esta igualdad implica que $(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n) \in N(T)$.

   Como T es inyectiva, entonces $N(T) = \{0\}$, lo cual implica $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n = 0$.

   Por hipótesis: $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ es $\ell.i.$, entonces $a_1 = a_2 = \ldots\ a_n = 0$.

   Por tanto: $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ es $\ell.i.$

3. El conjunto $\{T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ es una base de W. Esto queda probado por 1 y 2.

4. De 3 se deduce que la base de V tiene n vectores y la base de W también tiene n vectores.

5.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.

El siguiente teorema nos da la orientación necesaria y suficiente de cómo construir un isomorfismo entre dos espacios vectoriales de igual dimensión.

TEOREMA 12 Sea V y W dos $I\!K$-espacios vectoriales de dimensión finita, con $\dim V = \dim W$. Entonces V es isòmorfo a W.

Para demostrar la validez de la tesis de éste teorema, se debe probar el valor de verdad de dos proposiciones:

P$_1$) Existe una $t.\ell.$ $T: V \longrightarrow W$, tal que T es un isomorfismo (T inyectiva y sobre)

P$_2$) La $t.\ell.$ T es única (unicidad de T).

Para demostrar (P$_1$), bastará llevar a través de la función T, una base de V a una base de W, haciendo la siguiente operación:

1) Supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ una base de W.

2) Sea T una $t.\ell.$ definida por $T(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3) Faltará probar que la función T definida en (2), es **INYECTIVA** y **SURYECTIVA**.

   a) Por demostrar que $N(T) = \{\mathbf{O}\}$, para afirmar que T es inyectiva.

4) Supongamos que $v \in V$, entonces existen escalares $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$, tal que
$$v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ por (1)}$$

   Aplicar T: $T(v) = T(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n)$
$$= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots\ldots + c_nT(v_n)$$
$$= c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_nw_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ por (2)}$$

5) Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de W $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ por (1)

   entonces $c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_nw_n = \mathbf{O}$ implica $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

   Hemos probado que $T(v) = \mathbf{O}$ implica $v = 0$; esto es $N(T) = \{0\}$.

   b) Probemos que T es suryectiva.

   Según el teorema, si T es una $t.\ell.$ que cumple:

   i) $\dim V = \dim W$

   y *ii)* T es inyectiva , Entonces T es suryectiva.

6) Por (a) y (b) concluimos que T es un isomorfismo.

Por demostrar (P_2): **unicidad de T**

Para demostrar la unicidad de T partimos de la siguiente suposición:

1. Supongamos que existe la $\mathcal{L}.\mathcal{L}.$ $g : V \longrightarrow W$ tal que $g(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   Debo probar que $g = T$

2. Para todo vector $v \in V$ se cumple:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

$$\Rightarrow \quad g(v) = g\left(\sum c_i v_i\right)$$

$$= \sum c_i\, g(v_i) \text{ , donde } g(v_i) = w_i$$

$$\Rightarrow \quad = \sum c_i\, w_i$$

Pero $w_i = T(v_i)$, entonces.

$$g(v) = \sum c_i\, T(v_i)$$

$$= T\left(\sum c_i\, v_i\right)$$

$$= T(v)$$

3. Si $\forall\, v \in V$, $g(v) = T(v)$ entonces $g = T$ ∎

5.4 EJEMPLO:

Dados los $I\!R$-espacios vectoriales: $U = \{ f(x) = a + bx^2 + cx^4 \,/\, a, b, c \in I\!R, gr(f) \leq 4\}$

y $V = \{(p, r, s, t) \in I\!R^4 \,/\, p + r + s + t = 0\}$

Construir un isomorfismo entre U y V.

Solución:

1. Hallar una base de U.

   Una base de U es: $B_1 = \{ \underbrace{1}_{e_1}, \underbrace{x^2}_{e_2}, \underbrace{x^4}_{e_3} \}$, $\dim U = 3$

2. Hallar una base de V.

   De la ecuación $p + r + s + t = 0$, despejar p:

$$p = -r - s - t$$

   Entonces: $(p, r, s, t) = (-r - s - t\,, r\,, s\,, t)$

$$= r(-1,1,0,0) + s(-1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$$

Luego una base de V es $B_2 = \{\underbrace{(-1,1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(-1,0,0,1)}_{v_3}\}$ y por tanto, $\dim V = 3$

3. Se cumple que $\dim U = \dim V = 3$.

4. Hacer la siguiente correspondencia uno a uno.

$$T(e_1) = v_1$$
$$T(e_2) = v_2$$
$$T(e_3) = v_3$$

5. **Ahora, debemos hallar la regla de correspondencia de T. Necesitamos determinar la imagen de un vector genérico $\mu(x) \in U$.**

   1. **Si $\mu(x) \in U \Rightarrow \mu(x)$ es combinación lineal de los vectores $\{1, x^2, x^4\}$. Esto implica que existen escalares a, b, c, tal que:**

$$\mu(x) = a + bx^2 + cx^4$$

Aplicar T:

$$T(\mu(x)) = T(a + bx^2 + cx^4)$$
$$= aT(1) + bT(x^2) + cT(x^4) \quad \begin{cases} 1 = e_1 \\ x^2 = e_2 \\ x^4 = e_3 \end{cases}$$
$$= aT(e_1) + bT(e_2) + cT(e_3)$$
$$= av_1 + bv_2 + cv_3$$
$$= a(-1,1,0,0) + b(-1,0,1,0) + c(-1,0,0,1)$$
$$T(a + bx^2 + cx^4) = (-a - b - c\,, a\,, b\,, c) \;\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Conclusión: La aplicación $T : U \longrightarrow V$ definido por (*) es un isomorfismo.

NOTA:

1) **Los vectores $(a - b - c\,, a\,, b\,, c) \in V$, porque cumplen: la suma de las cuatro componentes es igual a cero.**

2) **Si los vectores de la base de V los disponemos en una matriz y le aplicamos las operaciones elementales, obtendremos una nueva base y por ende obtendremos una nueva regla de correspondencia para T.**

Veamos:

$V = \mathfrak{L}\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$

Disponer los vectores en una matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-1) \approx \underset{\text{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \approx \underset{\text{II}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \approx \underset{\text{III}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}} \approx \underset{\text{IV}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$$

Las operaciones elementales sobre la primera matriz son:

I. Multiplicar por –1 la fila 2 y permutar con la fila 1.
II. Sumar las 3 filas y escribir el resultado en la fila 3, permaneciendo fijas las filas 1 y 2.
III. Sumar fila 1 con fila 3 y escribir el resultado en la fila 3, permaneciendo fijas las filas 1 y 2.
IV. Cambiar de signo la fila 3.

La nueva base de V es $B_3 = \{(1,0,-1,0),(-1,1,0,0),(0,-1,2,-1)\}$

Haciendo la correspondencia uno a uno: $T(e_1) = v_1'$

$T(e_2) = v_2'$

$T(e_3) = v_3'$

Construyamos la regla de correspondencia de T: Sea $v \in U \Rightarrow \exists\ a, b, c$ tal que:

$$\begin{aligned} v &= ae_1 + be_2 + ce_3 = a + bx^2 + cx^4 \\ \Rightarrow\ T(v) &= T(ae_1 + be_2 + ce_3) \\ &= aT(e_1) + bT(e_2) + cT(e_3) \\ &= aV_1' + bV_2' + cV_3' \\ &= a(1,0,-1,0) + b(-1,1,0,0) + c(0,-1,2,-1) \\ T(v) &= (a-b\,,\, b-c\,,\, 2c-a\,,\, -c)\ ,\ v = a + bx^2 + cx^4 \end{aligned}$$

Así tenemos que T es una $t.\ell.$ de U en V, definido por: $T(v) = (a-b\,,\, b-c\,,\, 2c-a\,,\, -c)$

TEOREMA 13 Todo espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $I\!K$ es isomorfo al espacio $I\!K^n$.

Demostración: (ejercicio)

6. APLICACIÓN CANÓNICA DE PASO AL COCIENTE

6.1 PROPOSICIÓN

Sea V un K-espacio vectorial y V' un subespacio, podemos construir una aplicación π definida en V y con valores en el espacio cociente V/V' de la siguiente forma:

$$\pi : V \longrightarrow V/V'$$

$$v \longmapsto \overline{v} = \pi(v)\ ,\ \text{donde } \overline{v} = \{\overset{\text{Fijo}}{\downarrow}{v} + V'/v' \in V'\} = \{v + v'/v' \in V'\}$$

A cada vector v de V hacemos corresponder el conjunto $\overline{v}$, que es la imagen de v mediante π. La aplicación π así definida, es una TRANSFORMACIÓN lineal y por tanto, satisface la definición:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha\mu + v) &= \overline{\alpha\mu + v}\quad ,\quad \mu \in V\ ,\ v \in V\ ,\ \alpha \in I\!K \\ &= \overline{\alpha\mu} + \overline{v} \\ &= \alpha\overline{\mu} + \overline{v} \\ &= \alpha\ T(\mu) + T(v) \end{aligned}$$

Además tenemos que:

1) La imagen de π es V/V' o sea $\text{Img}(\pi) = V/V'$

2) El núcleo de π es V' o sea $\text{Ker}(\pi) = V'$

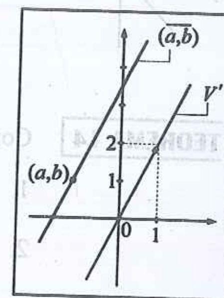
Ejemplo: Sea $V = I\!R^2$ y $V' = \{t(1.2)/t \in I\!R\}$

Defino: $\pi : V \longrightarrow V/V'$

$v \longrightarrow \overline{v} = \pi(v)$, donde $\overline{v} = \{v + V'/v' \in V\}$
$= \{v + t(1,2)/t \in I\!R\}$

Donde: Si $v = (a,b)$, **entonces:** $\overline{(a,b)} = \{(a,b) + t(1,2)/t \in I\!R\}$

Geométricamente $\overline{(a,b)}$ **es una recta que pasando por el punto** (a,b) **es paralelo a la recta** V'



La $\text{Im}(\pi) = \{\overline{v} \in V/V'$ **tal que** $\exists\, v \in V$ **con** $\pi(v) = \overline{v}\}$
$= \{\overline{v}$, **tal que** $v \in V = V/V'\}$

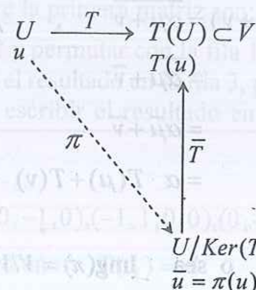
El núcleo de π, **es:** $\text{Ker}(\pi) = \{v \in V/\pi(v) = \overline{\text{O}}\}$

Pero $\overline{\text{O}} = \{0 + V'/t \in I\!R\}$
$= \{V'/t \in I\!R\}$

Entonces $\ker(\pi) = V'$

6.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Dada una transformación lineal $T : U \longrightarrow V$ **y la aplicación** $\pi : U \longrightarrow U/Ker(T)$, **existe una transformación lineal** $\overline{T} : U/Ker(T) \longrightarrow V$ **definida por** $\overline{T}(\overline{u}) = T(u)$, **donde** $\overline{u} = u + Ker(T)$, **de tal modo que en el diagrama:**



Se cumple $T = \overline{T} \circ \pi$.

Tener en cuenta lo siguiente:

1. $\overline{u}$ es un subconjunto de U.
2. $\overline{u} = u + Ker(T)$ es un elemento de $U/Ker(T)$
3. u es un elemento de $\overline{u}$.
4. $T(U) = \text{Im}(T)$ es la imagen de T.
5. Los elementos de $U/Ker(T)$ son clases de equivalencia, esto es:

$$\overline{u} \in U/Ker(T) \iff \overline{u} = \{u + Ker(T) / u \in U\}$$

└ fijo

TEOREMA 14 Con las hipótesis anteriores se cumplen:

1. $T = \overline{T} \circ \pi$ (T es factorizable).
2. $\overline{T} : U/Ker(T) \longrightarrow T(U)$ es un isomorfismo.

Demostración:

En primer lugar, probaremos que $\overline{T}$ está bien definida (es decir que $\overline{T}$ es una función).

Afirmar que $\overline{u} \longmapsto T(u) = \overline{T}(\overline{u})$ es equivalente a la afirmación "Si se eligen dos elementos u y v de U entonces $T(u) = T(v)$".

Probar $T(u) = T(v)$.

Sean $u, v \in T$ tal que: $\overline{u} = \overline{v}$

$$\overline{u + Ker(T)} = \overline{v + Ker(T)}$$

Pero, dos clases de equivalencia $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son iguales si:

$$(u - v) \in Ker(T)$$

$\Rightarrow \quad T(u - v) = 0$

$\Rightarrow \quad T(u) - T(v) = 0$, porque T es una transformación lineal.

$\Rightarrow \quad T(u) = T(v)$

Esta última igualdad implica que:

$$\overline{T}(\overline{u}) = T(u) = T(v) = \overline{T}(\overline{v}) \ , \text{ donde } \begin{cases} \overline{u} = u + Ker(T) \\ \overline{v} = v + Ker(T) \end{cases}$$

Lo que prueba que $\overline{T}$ está bien definida.

Demostración de 1: $T = \overline{T} \circ \pi$

De la definición de $\overline{T}$, para cada $u \in U$, tenemos:

$$T(u) = \overline{T}(\overline{u}) \ , \text{ pero } \overline{u} = \pi(u) \ ; \text{ entonces}$$
$$= \overline{T}(\pi(u))$$
$$= (\overline{T} \circ \pi)(u)$$
$$\Rightarrow \quad T = \overline{T} \circ \pi$$

Demostración de 2: $\overline{T}$ es un isomorfismo

Se debe probar dos afirmaciones: a) $\overline{T}$ es suryectiva.
b) $\overline{T}$ es inyectiva.

Prueba de a):

Por la definición de $\overline{T}$, que es: $\overline{T}(\overline{u}) = T(u)$, $\forall\, u \in U$ y porque $u \longmapsto \overline{u}$ se cumple que $\text{Im}(\overline{T}) = \text{Im}(T)$, esta igualdad indica que $\overline{T}$ es suryectiva.

Prueba de b):

Bastará probar que $\ker(\overline{T}) = \{\overline{0}\}$

Veamos:

Definimos el $Ker(\overline{T}) = \{\overline{u} \in U/Ker(T)$, tal que $\overline{T}(\overline{u}) = 0 , 0 \in T(U)\}$

Sea $\overline{u} \in Ker(\overline{T})$, entonces $\overline{T}(\overline{u}) = 0$, $0 \in T(u)$.

Por definición de $\overline{T}$ se cumple. $\overline{T}(u) = T(u)$, $u \in U$.

Ahora, tenemos $\overline{T}(\overline{u}) = T(u) = 0$.

Pero $T(u) = 0$ implica que $u \in Ker(T)$.

La relación $\overline{T}(\overline{u}) = T(u) = 0$, con $u \in Ker(T)$ implica que $\overline{u} = 0 + Ker(T)$

Esta última igualdad, implica que $\overline{u} = \overline{0}$, pues $\overline{0} = 0 + Ker(T)$.

ꕥ ♦ ꕥ

Notación: $U/Ker(T) \approx T(U)$ se lee " $U/Ker(T)$ es isomorfo a $T(U)$"

COROLARIO 1 Sean R y S subespacios del espacio vectorial V. Entonces $\frac{R}{R \cap S} \approx \frac{R+S}{S}$

Demostración:

Para aplicar el teorema 13, se debe probar tres afirmaciones.

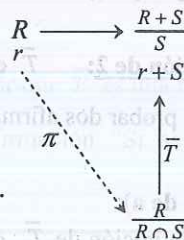
1. $T : R \longrightarrow \frac{R+S}{S}$ es una transformación lineal.

   $r \longmapsto r+S$, pues $(r+s)+S = r+(s+S) = r+S$

2. $\frac{R+S}{S} = \text{Im}(T)$, esta igualdad nos die que T es suryectiva.

3. $R \cap S = Ker(T)$

4. Después de probada: 1, 2 y 3; afirmamos que T es factorizable y se puede hacer el siguiente diagrama:



Veamos:

1. Probar que $\overline{T}$ es una transformación lineal, es sencillo.
2. Probar que T es suryectiva:

   Se debe probar que "para todo elemento $r+S$ de $\frac{R+S}{S}$ existe algún elemento r de R tal que $r+S = T(r)$".

Empecemos:

Los elementos de $\frac{R+S}{S}$ son de la forma $(r+s)+S$ para todo $s \in S$.

Pero $(r+s)+S = r+(s+S)$, donde $s+S = S$, entonces $(r+s)+S = r+S$.

Luego $T(r) = r+S = (r+s)+S = T(r+s)$, lo que prueba que T es suryectiva.

3. Probar que $Ker(T) = R \cap S$.

Veamos:

$$Ker(T) = \{r \in R \,/\, T(r) = \overline{0} \;\; , \;\; \overline{0} = r+S = S\}$$

$$= \{r \in R \,/\, r \in S\} = R \cap S$$

$$r \in R \cap S$$

En consecuencia, por el teorema 13, se cunple que $\overline{T} : \frac{R}{R \cap S} \longrightarrow \frac{R+S}{S}$ es un isomorfismo.

COROLARIO 2 Sean R y S subespacios de V tales que $R \subset S$, entonces $\frac{V/R}{S/R} \approx \frac{V}{S}$

Demostración:

Observándo la tesis del corolario 2, para poder aplicar el Teorema 13 y poder hacer el siguiente diagrama:

$$\frac{V}{R} \xrightarrow{\;T\;} \frac{V}{S}$$
$$\pi \searrow \quad \uparrow \overline{T}$$
$$\frac{V/R}{S/R}$$

Se deben probar tres afirmaciones:

1. $T(v+R) = v+S$ es una aplicación lineal bien definida.
2. T es suryectiva.
3. $Ker(T) = \frac{S}{R}$.

Si se cumplen 1, 2 y 3 afirmaremos que $\overline{T}$ es un isomorfismo.

Demostración: (queda como ejercicio).

6.4 EJEMPLO 1

Sea $T: U \longrightarrow V$, $U = I\!R^3$, $V = I\!R^3$ una transformación lineal, definida por:

$T(x,y,z) = (x + 3y + 4z\ , 3x + 4y + 7z\ , -2x + 2y)$, donde:

a) La imagen de T es el subconjunto $\text{Im}(T) \subset V$, que al definirla es:
$\text{Im}(T) = \{(x,y,z) \in V : 14x - 8y - 5z = 0\}$

b) El núcleo de T es $\text{Ker}(T) = \{(x,y,z) \in U :\ x = -t\ , y = -t\ , z = -t\}$
$= \{t(-1,-1,-1)\ , t \in I\!R\}$

c) Al elegir un elemento $P_0(x_0,y_0,z_0)$ de U, un elemento del conjunto cociente $U/\text{Ker}(T)$ es:

$$P = P_0 + t(-1,-1,-1)\ ,\ t \in I\!R$$

que es una recta que pasando por el punto P_0 es paralelo a la recta $\{t(-1,-1,-1)\ , t \in I\!R\}$
En general: $\overline{\mu} = \mu + t(-1,-1,-1)$, $\forall\ \mu \in U$ es un elemento del conjunto cociente $U/\text{Ker}(T)$.

EJEMPLO 2 Hallar números a, b, c, d de modo que el operador $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ dado por $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, tenga como núcleo la recta $y = 3x$.

Solución:

El núcleo de T es $N(T) = \{(x,y) \in I\!R^2 : (ax + by, cx + dy) = (0,0)\}$

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ cx + dy = 0 \end{array}\right.$

Si el núcleo es $y = 3x \Longleftrightarrow 3x - y = 0$, entonces en (1) debe ser $a = 3$, $b = -1$ y en (2) debe ser $c = 3k$ y $d = -k\ , k \neq 0\ , k \in I\!R$.

EJEMPLO 3 Sea $E = C^{\circ}(I\!R)$ es espacio de funciones continuas $f : I\!R \longrightarrow I\!R$. Defina el operador lineal $T : E \longrightarrow E$ poniendo para cada $f \in E$, $T(f) = \varphi$, donde

$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt\ , x \in I\!R$. Determine el núcleo y la imagen del operador T.

Solución:

Se tiene: $T: E \longrightarrow E$

$$f \longmapsto T(f) = \varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dt$$

a) El núcleo es $N(T) = \{f \in E : T(f) = 0\}$ .... (1)

Pero $T(f) = \varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$. ¿qué forma tiene f?

De $0 = \varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, al derivar obtenemos: $0 = \varphi'(x) = f(x)$

Entonces, el núcleo de T tiene un solo elemento que es la función NULA $f(x) = 0,\ x \in I\!R$.

b) La imagen del operador T es el subconjunto $\text{Im}(T) \subset I\!R^2$ formado por todos los vectores

$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde $f \in E$.

EJEMPLO 4 Determine una base para la imagen de la siguiente aplicación lineal.

$T: M(2 \times 2) \longrightarrow M(2,2)$, definido por $T(X) = AX$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución: $\text{Im}(T) = \{AX / X \in M(2 \times 2)\}$

Sea, $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \mu \end{bmatrix}$, entonces $AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+\mu \\ z & \mu \end{bmatrix}$

Descomponer $AX = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Una base de $\text{Im}(T)$ es el conjunto: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

EJEMPLO 5 Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $I\!R$ y $T : V \longrightarrow V$ el operador tercera derivada, esto es $T[f(t)] = \frac{d^3 f}{dt}$.

[A veces se emplea la notación $T = D^3$ donde D es la aplicación derivada].
Hallar el núcleo de T y la imagen de T.

Solución:

a) El núcleo de T es $N(T) = \{f \in V : T[f(t)] = 0\}$, $0 \in V$.

Si $T[f(t)] = \frac{d^3 f}{dt}$, entonces $\frac{d^3 f}{dt} = 0$

Al integrar tres veces $\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2 f}{dt} = a \\ \frac{df}{dt} = at + b \\ f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c \end{array}\right.$

Entonces el núcleo de T es $N(T)=\{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$ porque $T(At^2+Bt+C)=0$, pero $T(t^n)\neq 0$ para $n>3$.

b) La imagen de T es, $\text{Im}(T)=V$, porque todo polinomio de V es la tercera derivada de algún polinomio.

EJEMPLO 6 Sea $\beta=\{(2,1),(3,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$, hallar la base dual $\{\phi_1,\phi_2\}$.

Solución:

- Sean $v_1=(2,1)$, $v_2=(3,1)$ los elementos de β.
- Sean $\phi_1=ax+by$ y $\phi_1(x,y)=cx+dy$ los elementos de la base dual que buscamos. Debemos hallar: a, b, c, d.
- Las funcionales lineales ϕ_1, ϕ_2 del espacio dual V^*, donde $V=\mathbb{R}^2$, están definidas mediante. $\phi_i(v_j)=\begin{cases}1, & \text{si } i=j\\ 0, & \text{si } i\neq j\end{cases}$

Así, obtendremos: $\begin{cases}\phi_1(v_1)=1 & \phi_2(v_1)=0\\ \phi_1(v_2)=0 & \phi_2(v_2)=1\end{cases}$

Al hacer las sustituciones:

$$\begin{cases}\phi_1(v_1)=\phi_1(2,1)=\boxed{2a+b=1}\\ \phi_1(v_2)=\phi_1(3,1)=\boxed{3a+b=0}\end{cases}\Rightarrow a=-1\ ,\ b=3$$

$$\begin{cases}\phi_2(v_1)=\phi_2(2,1)=\boxed{2c+d=0}\\ \phi_2(v_2)=\phi_2(3,1)=\boxed{3c+d=1}\end{cases}\Rightarrow c=1\ ,\ d=-2$$

Por tanto, los elementos de la base dual, son las funciones:

$$\phi_1(x,y)=-x+3y\quad ,\quad \phi_2(x,y)=x-2y.$$

EJEMPLO 7 Sea $V=\{a+bt: a,b\in\mathbb{R}\}$ el e.v. de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 1.

Definimos: $\phi_1: V\longrightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2: V\longrightarrow\mathbb{R}$ según $\phi_1(f(t))=\int_0^1 f(t)\,dt$ y

$\phi_2(f(t))=\int_0^2 f(t)\,dt$. Encontrar la base $\{v_1, v_2\}$ de V que es dual a $\{\phi_1,\phi_2\}$.

Solución:

Elegir $v_1=a+bt$ y $v_2=c+dt$. Por definición de base dual, tenemos: $\phi_1(v_1)=1$, $\phi_1(v_2)=0$, $\phi_2(v_1)=0$, $\phi_2(v_2)=1$. Hacer las sustituciones:

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(v_1)&=\int_0^1(a+bt)\,dt=at+\tfrac{b}{2}t^2\Big|_0^1=1\ \Rightarrow\ a+\tfrac{b}{2}=1\\ \phi_2(v_1)&=\int_0^2(a+bt)\,dt=at+\tfrac{b}{2}t^2\Big|_0^2=0\ \Rightarrow\ 2a+2b=0\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}a&=2\\ b&=-2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(v_2)&=\int_0^1(c+dt)\,dt=ct+\frac{dt^2}{2}\Big|_0^1=0\ \Rightarrow\ c+\tfrac{d}{2}=0\\ \phi_2(v_2)&=\int_0^2(c+dt)\,dt=ct+\frac{dt^2}{2}\Big|_0^2=1\ \Rightarrow\ 2c+2d=1\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}c&=-\tfrac{1}{2}\\ d&=1\end{aligned}$$

Conclusión:

$\left\{2-2t\ ,\ -\frac{1}{2}+t\right\}$ es una base de V.

7. REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES POR MATRICES

Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y base ordenada $\beta=\{v_1,\ldots,v_n\}$

Sea W un e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión m y base ordenada $\beta'=\{w_1,\ldots,w_m\}$

Cualquier $\mathcal{T.L.}$ $T: V\longrightarrow W$ está asociada una matriz A de orden $m\times n$.

A la matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ la llamaremos matriz de T respecto al par de bases ordenadas β y β'.

Detallaremos este concepto en el siguiente teorema:

7.1 **TEOREMA 15** Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y W un espacio vectorial de dimensión m sobre $\mathbb{K}$.

Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V y $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base ordenada de W. Para cada transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ existe una matriz A de $m \times n$, tal que $T(X) = AX$, $\forall X \in V$ y además $[T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta$, $\forall v \in V$.

$[T(v)]_{\beta'}$: son las coordenadas del vector $T(v)$ en la base ordenada β'.

$[v]_\beta$: son las coordenadas del vector v en la base ordenada β.

Además a cada transformación lineal T corresponde una matriz A. Existe una biyección entre los conjuntos:

$$IK^{m\times n} = \{(a_{ij}) \,/\, a_{ij} \in IK\} \;\text{ y }\; L(V, W) = \{T: V \longrightarrow V \,/\, T \text{ es una } t.\ell.\}$$

Demostración:

1. Al elegir un vector v_j de β, el vector $T(v_j)$ es combinación lineal de los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_m$; esto es:

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots\ldots + a_{mj}w_m$$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

o explícitamente:

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots\ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots\ldots + a_{m2}w_m \\ \quad\vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots\ldots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Los escalares a_{ij} , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ pertenecientes a IK son los elementos de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

La matriz A, que está asociada a T, se llama la matriz de T respecto a las bases ordenadas β y β'.

2. Ahora debo probar que $[T(v)]_{\beta'} = A[v]_{\beta'}$ para todo $v \in V$.

$$\boxed{\begin{array}{l} V \xrightarrow[A]{T} W \\ \beta \longrightarrow \beta' \\ V \longrightarrow T(v) \\ [T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta \end{array}}$$

Veamos:

3. $\forall v \in V$, $\exists \alpha_j \in IK \,/\, v = \sum_{j}^{n} \alpha_j v_j$

y $\forall w = T(v) \in W$, $\exists \alpha'_i \in IK \,/\, w = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i w_i$ .... (2*)

4. Por tanto: $w = T(v)$

$$= T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j) \text{ , pero } T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right)}_{\alpha'_i} w_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ por } (2*)$$

5. **Porque la combinación lineal es única, entonces:**

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \qquad 1 \le i \le m$$

es la i-ésima componente del vector en la base β'

Es decir:

$$\begin{cases} \alpha'_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\alpha_n \\ \alpha'_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\alpha_n \\ \quad\vdots \\ \alpha'_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\alpha_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \vdots\\ \alpha'_m\end{bmatrix}}_{[w]_{\beta'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}}_{[v]_\beta}$$

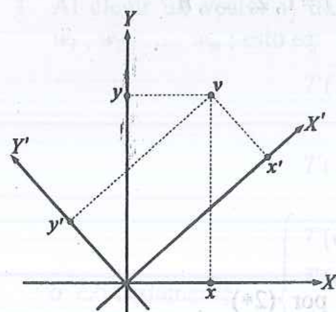
$$[T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta \quad , \quad w = T(v)$$

└── producto de la matriz A por la matriz $[v]_\beta$

7.2 · EJEMPLOS

01 EJEMPLO GEOMÉTRICO.

Sea $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V_2, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$.



Sea $\beta' = \{w_1, w_2\}$ otra base de V_2, $w_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $w_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. XY los ejes para β, $X'Y'$ los ejes para β'.

Sean $\overbrace{\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}}^{[v]_\beta}$ las coordenadas de v en la base β

y $\underbrace{\begin{bmatrix} x'\\ y'\end{bmatrix}}_{[v]_{\beta'}}$ las coordenadas de v en la base β'

Sea P la matriz de transición de β a β'

$$\begin{matrix} V & & V\\ XY & & X'Y'\\ \beta & \xrightarrow{P} & \beta' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = x'\begin{bmatrix} 4/5\\ 3/5\end{bmatrix} + y'\begin{bmatrix} -3/5\\ 4/5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5\\ 3/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'\\ y'\end{bmatrix} \ , \quad P = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5\\ 3/5 & 4/5\end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = [v]_\beta \ , \ \begin{bmatrix} x'\\ y'\end{bmatrix} = [v]_{\beta'}$$

Matricialmente es: $[v]_\beta = P[v]_{\beta'}$, $T(x', y') = (4/5\,x' - 3/5\,y', 3/5\,x' - 4/5\,y')$

Hallando $[v]_{\beta'}$ $\quad [v]_{\beta'} = P^{-1}[v]_\beta$

$$\begin{bmatrix} x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5\\ -3/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} \ , \quad T^{-1}(x,y) = \left(\tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y, -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right)$$

Geométricamente: (x,y) son las coordenadas del vector v en la base β (plano XY)

(x',y') son las coordenadas del vector v en la base β' (plano $X'Y'$)

caso particular: $(4,5)$ son las coordenadas de v en la base β.

$(6.2, 1.6)$ son las coordenadas de v en la base β'.

02 Una transformación lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ está definido por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + x_3)$$

a) Hallar la matriz A de T, respecto de las bases:
$\beta = \{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$ en $I\!R^3 = V$
$\beta' = \{(2,0), (0,2)\}$ en $I\!R^2 = W$

b) Mediante A, obtener la imagen de $(-2, 2, -2) \in I\!R^3$.

c) Determinar la matriz B de T, respecto de las bases canónicas en ambos espacios.

d) Obtener la matriz C de la misma transformación lineal, respecto de la base canónica en $I\!R^3$ y la base β' en $I\!R^2$ dado en a).

Solución:

a) En primer lugar, hallar la imagen de cada vector de la base β.

$$T(1,1,1) = (1 - 2(1), 1 + 1) = (-1, 2)$$

$$T(2,2,0) = (2 - 2(0), 2 + 0) = (2, 2)$$

$$T(3,0,0) = (3 - 2(0), 0 + 0) = (3, 0)$$

En segundo lugar, expresar los vectores $(-1,2)$, $(2,2)$, $(3,0)$ como combinación de la base ordenada $\beta' = \{(2,0), (0,2)\}$; así:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (-1,2) = a_{11}(2,0) + a_{21}(0,2)\\ T(2,2,0) &= (2,2) = a_{12}(2,0) + a_{22}(0,2)\\ T(3,0,0) &= (3,0) = a_{13}(2,0) + a_{23}(0,2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (-1,2) = -\frac{1}{2}(2,0) + 1(0,2)\\ (2,2) = 1(2,0) + 1(0,2)\\ (3,0) = \frac{3}{2}(2,0) + 0(0,2) \end{cases}$$

Luego: $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 3/2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz de la transformación lineal T, respecto de las bases β y β'.

b) La imagen de $v = (-2, 2, -2) \in I\!R^3$ mediante A es $[T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta$.

PASO 1: Bastará hallar $[v]_\beta$, esto es, hallar α_1 , α_2 , α_3 ; tal que:

$$(-2\ ,2\ ,-2) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(2,2,0) + \alpha_3(3,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\alpha_3\ ,\ \alpha_1 + 2\alpha_2\ ,\ \alpha_1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = -2 \end{cases}$$

Resolviendo: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -4/3$

Entonces $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$. Los números α_1, α_2, α_3 son las coordenadas de v en la base β.

PASO 2: Conocidos las matrices A y $[v]_\beta$, ya podemos hallar la matriz $[T(v)]_{\beta'}$ mediante la fórmula:

$$[T(v)]_{\beta'} = A[v]_\beta$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conclusión: Las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β' son 1 y 0, esto es, $T(v) = \mathbf{1}(2,0) + \mathbf{0}(0,2)$

NOTA:

(1) Los escalares $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -4/3$, componentes de $[v]_\beta$, son las coordenadas del vector $v = (-2\ ,2\ ,-2)$ con respecto a la base β, porque:

$$v = \underset{-2}{\alpha_1} + (1,1,1) + \underset{2}{\alpha_2}(2,2,0) + \underset{-4/3}{\alpha_3}(3,0,0)$$

coordenadas de v en la base β

(2) Los escalares $\alpha_1' = 1$, $\alpha_2' = 0$, componentes de $[T(v)]_{\beta'}$, son las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β'.

$T(-2\ ,2\ ,-2) = (-2 - 2(-2)\ ,\ 2 + (-2))$ con respecto a la base

$= (2,0) = \mathbf{1}(2,0) + \mathbf{0}(0,2)$

coordenadas de $T(v)$ en la base β'

(3) Notar la siguiente gran diferencia:

i) En el vector $v = (-2\ ,2\ ,-2) \in I\!R^3$, las coordenadas de v en la base canónica $\{(1,0,0)\ ,(0,1,0)\ ,(0,0,1)\}$ son $-2\ ,2\ ,-2$; porque:

$$v = -2(1,0,0) + 2(0,1,0)\ -2(0,0,1)$$

Pero, las coordenadas de v con respecto a la base β son -2 , 2 y $-4/3$, porque cumple: $v = -2\,(1,1,1) + 2(2,2,0) - \frac{4}{3}\,(3,0,0)$

ii) En el vector $w = (2,0) \in I\!R^2$, las coordenadas de w con respecto a la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$ son 2 y 0 porque:

$$w = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{0}(0,1)$$

Pero, las coordenadas del vector $w = T(v)$ en la base β', son 1 y 0, porque:

$$T(v) = \mathbf{1}(2,0) + \mathbf{0}(0,2)$$

c) La matriz B de T respecto de las bases canónicas en ambos espacios, se halla fácilmente del siguiente modo:

Se tiene la transformación lineal

$T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ definido por: $T(x_1\ ,x_2\ ,x_3) = (x_1 - 2x_3\ ,\ x_2 + x_3)$

Hacer: $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0x_2 - 2x_3 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de T respecto a las bases canónicas $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\{(1,0),(0,1)\}$

Otra forma de obtener B es como sigue:

i) La base canónica de $V = I\!R^3$ es $\{(1,0,0)\ ,(0,1,0)\ ,(0,0,1)\}$
La base canónica de $W = I\!R^2$ es $\{(1,0)\ ,(0,1)\}$

ii) Hallar la imagen de cada vector: $(1,0,0)\ ,(0,1,0)\ ,(0,0,1)$

$$T(1,0,0) = (1 - 2\,(0)\ ,\ 0 + 0) = (1\ ,0)$$
$$T(0,1,0) = (0 - 2\,(0)\ ,\ 1 + 0) = (0\ ,1)$$
$$T(0,0,1) = (0 - 2\,(1)\ ,\ 0 + 1) = (-2\ ,1)$$

iii) Ahora expresamos cada vector: (1,0), (0,1), (–2,1) como combinación lineal de los vectores canónicos: (1,0) y (0,1). Así:

$$T(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{0}(1,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,1) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{1}(0,1)$$
$$T(0,0,1) = (-2,1) = \mathbf{-2}(1,0) + \mathbf{1}(0,1)$$

Así obtenemos, la matriz: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN.- Si alteramos el orden de los vectores en cada base obtendremos otras matrices diferente de *B*. Por eso es importante hablar de bases ordenadas.

d) Datos:

La base canónica en $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = [e_i]$

La base $\beta' = \{(2,0),(0,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$.

Se pide hallar una matriz C de paso de $[e_i]$ en β'

Veamos: *i*)
$$T(1,0,0) = (1,0) = c_{11}(2,0) + c_{21}(0,2)$$
$$T(0,1,0) = (0,1) = c_{12}(2,0) + c_{22}(0,2)$$
$$T(0,0,1) = (-2,1) = c_{13}(2,0) + c_{23}(0,2)$$

ii) Resolviendo cada ecuación, obtenemos los valores de los c_{ij}:

$$(1,0) = \tfrac{1}{2}(2,0) + \mathbf{0}(0,2)$$
$$(0,1) = \mathbf{0}(2,0) + \tfrac{1}{2}(0,2)$$
$$(-2,1) = \mathbf{-1}(2,0) + \tfrac{1}{2}(0,2)$$

iii) $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

03 Dado la transformación lineal.

$T: P_3 \longrightarrow P_2$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$

Se pide:
a) Hallar la matriz asociada a *T*.
b) Hallar el NÚCLEO de *T* y la imagen de *T*.
c) Hallar una base del NÚCLEO de A_T y una base del Rango de *A*.

Solución de a):

Datos:

Una base ordenada de P_3 es $\{1, x, x^2, x^3\} = \beta$

Una base ordenada de P_2 es $\{1, x, x^2\} = \beta'$

Se pide hallar la matriz de tránsito de β a β'

Se resuelve con dos pasos:

1° Hallar la imagen de cada vector de β aplicando la definición:
$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$

2° Cada polinomio imagen expresar como combinación lineal de la base β'

Así:
$$T(1 + 0x + 0x^2 + 0x^3) = 0 + 0x^2 = 0.1 + 0x + 0x^2$$
$$T(0 + x + 0x^2 + 0x^3) = 1 + 0x^2 = 1.1 + 0x + 0x^2$$
$$T(0 + 0x + x^2 + 0x^3) = 0 + 1x^2 = 0.1 + 0x + 1x^2$$
$$T(0 + 0x + 0x^2 + x^3) = 0 + 0x^2 = 0.1 + 0x + 0x^2$$

La matriz A_T es: $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución de b):

i) $N(T) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \,/\, T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0 + 0x + 0x^2\}$

Resolver la identidad: ($T(\ldots) = a_1 + a_2x^2$)

$$a_1 + a_2x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Luego:
$$N(T) = \{a_0 + 0x + 0x^2 + a_3x^3 \,/\, a_i \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a_0 + a_3x^3 \,/\, a_0 + a_3 \in \mathbb{R}\}$$

Una base de $N(T)$ es $\{1, x^3\}$

ii) $Im(T) = \{a_1 + a_2x^2 \,/\, \exists\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,\ T(p(x)) = a_1 + a_3x^2\}$

Una base de $Im(T)$ es $\{1, x^2\}$.

c) En la matriz $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observamos que el RANGO de A_T es 2 y se denota por $\rho(A_T) = 2$

Consecuencias:

i) Teniendo como dato la base de $Im(T) = L\{1, x^2\}$ se deduce que:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2$$
$$x^2 = 0 + 0x + 1 \cdot x^2$$

Del cual se obtiene el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ que viene a ser una base del recorrido de la matriz A_T.

ii) Teniendo como dato la base de $N(T) = L\{1, x^3\}$ se deduce que:

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$
$$x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 1 \cdot x^3$$

De estas dos ecuaciones obtenemos el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ que viene a ser una base del NÚCLEO de la matriz A_T.

04 Sea $V = L\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$. Halle A_D donde $D: V \longrightarrow V$ se define como: $Df(x) = f'(x)$. Encuentre el recorrido de la transformación D y núcleo de D.

Solución:

La notación $V = L\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ se lee "V es un espacio vectorial generado por los vectores: 1, sen *x*, cos *x*".

a) A_D es la matriz de pasaje de la base $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ a la base $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$.

La matriz A_D se halla aplicando la definición $Df(x) = f'(x)$ a cada vector: 1, sen *x*, cos *x*.

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 &&= 0.1 + 0 \cdot \operatorname{sen} x + 0 \cdot \cos x \\ D(\operatorname{sen} x) &= \cos x &&= 0.1 + 0 \cdot \operatorname{sen} x + 1 \cdot \cos x \\ D(\cos x) &= -\operatorname{sen} x &&= 0.1 + (-1) \cdot \operatorname{sen} x + 0 \cdot \cos x \end{aligned}$$

La matriz A_D es $A_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Hallar el Recorrido.

Definición $Im(D) = \{ f'(x) / \exists f(x) \in V, Df = f' \}$
$= \{ 0, \cos x, -\operatorname{sen} x \}$ ← *Aquí, "o" no debe estar porque su presencia convierte al conjunto en vectores linealmente dependientes.*

Elegir $Im(D) = L\{ \cos x, \operatorname{sen} x \}$

c) Hallar el NÚCLEO:

Definición: $N(D) = \{ f(x) / Df = 0 \}$
$= \{ k / k \in I\!R \}$
$= I\!R$

7.3 **TEOREMA 16** Sean V y W dos $I\!K$– espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente. Para cada par de bases ordenadas β y β' de V y W, respectivamente; la función $f: L(V,W) \longrightarrow I\!K^{m \times n}$

$$T \longmapsto A_T$$

que asigna a una transformación lineal T su matriz A_T respecto a β y β' es un isomorfismo entre el espacio $L(V,W)$ y el espacio $I\!K^{m\times n}$ de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $I\!K$.

7.4 REPRESENTACIÓN POR MATRICES DE LOS OPERADORES LINEALES

Estamos interesados en la representación por matrices de los operadores lineales $T: V \longrightarrow V$.

Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial V, (esto es $T: V \longrightarrow V$) de dimensión finita, y $\beta = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es una base ordenada de V, la matriz de T respecto a β es la matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cuyos elementos a_{ij} están definidos por las ecuaciones:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

La matriz que representa a T depende de la base ordenada β, y que existe una matriz que representa a T en cada base ordenada de V.

Vamos a denotar por $[T]_\beta$ a la matriz de T en la base β.

Si v es un vector cualquiera de V, las coordenadas de $T(v)$ en la base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se halla por: $[T(v)]_\beta = [T]_\beta [V]_\beta$

↑ **es el producto de la matriz $[T]_\beta$ por la matriz $[V]_\beta$.**

Ejemplo 1

Sea T el operador lineal sobre $I\!R^2$ definido por: $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

a) ¿Cual es la matriz de T en la base ordenada canónica de $I\!R^2$?

b) ¿Cuál es la matriz de en la base ordenada $\beta = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1,2)$ y $v_2 = (1,-1)$?

Solución:

(a) En $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

hacer $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_1 & -1x_2 \\ 1x_1 & +0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Así obtenemos $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que es la matriz de T en la base ordenada canónica $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$.

(b) Aplicar la definición:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, v_i$$

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}(1,2) + a_{21}(1,-1) \\ T(v_2) = a_{12}(1,2) + a_{22}(1,-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2,1) = a_{11}(1,2) + a_{21}(1,-1) \\ (1,1) = a_{12}(1,2) + a_{22}(1,-1) \end{cases}$$

Resolviendo cada ecuación se obtiene: $(-2,1) = -\frac{1}{3}(1,2) - \frac{5}{3}(1,-1)$

$$(1,1) = \tfrac{2}{3}(1,2) + \tfrac{1}{3}(1,-1)$$

Entonces $[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ es la matriz de T en la base β.

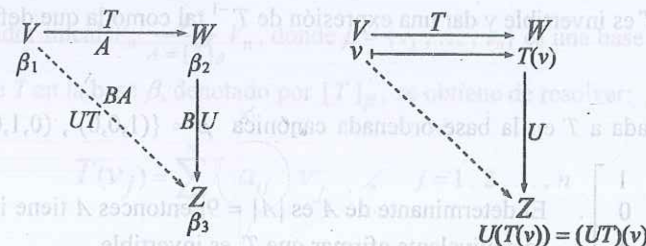
7.5 COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

TEOREMA 17 Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$; sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z.

Si β_1, β_2 y β_3 son las bases ordenadas de los espacios V, W y Z, respectivamente, y si A es la matriz de T respecto al par β_1, β_2 y B es la matriz de U respecto al par β_2, β_3, entonces la matriz de la composición UT respecto al par β_1, β_3 es la matriz producto $C = BA$.

Demostración:

Por los datos, hacer dos diagramas:



Supóngase que se tienen las bases ordenadas:

$\beta_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\beta_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $\beta_3 = \{z_1, \ldots, z_p\}$

para los respectivos espacios V, W y Z.

Si A es la matriz de T respecto al par β_1, β_2, entonces para cualquier vector $v \in V$ se tendrá

$$[T(v)]_{\beta_2} = A[v]_{\beta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si B es la matriz de U respecto al par β_2, β_3 entonces

$$[U(T(v))]_{\beta_3} = B[T(v)]_{\beta_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(2) en (1) $\quad [(UT)(v)]_{\beta_3} = BA[v]_{\beta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$

La igualdad (3) prueba que BA es la matriz de UT respectos al par β_1, β_3.

7.6 INVERSA DE UN OPERADOR LINEAL

Definición 6 El operador lineal $T : V \longrightarrow V$ es invertible sí, y solo si, $[T]_\beta$ es una matriz inversible.

El operador identidad I está representado por la matriz identidad en cualquier base ordenada y por lo tanto existe otro operador lineal U, tal que, $UT = TU = I$, donde $U = T^{-1}$ es la inversa del operador T.

Además, la igualdad $\quad UT = TU = I \quad$ es equivalente a:

$$[U]_\beta [T]_\beta = [T]_\beta [U]_\beta = I$$

Por otro lado, si T es invertible, se cumple $[T^{-1}]_\beta = [T]_\beta^{-1}$

Ejemplo 2. Sea T el operador lineal en $I\!R^3$ definido por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Demostrar que T es invertible y dar una expresión de T^{-1} tal como la que definió a T.

Solución:

La matriz asociada a T en la base ordenada canónica $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. El determinante de A es $|A| = 9$, entonces A tiene inversa, lo cual es equivalente afirmar que T es invertible.

La inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

Una expresión de T^{-1} es $T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

7.7 MATRIZ DE TRANSITO DE β a β' (MATRIZ DE CAMBIO DE BASE)

Recordemos cómo se halla la matriz de una transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ respecto a las bases ordenadas β y β' de V y W, respectivamente.

Sea la transformación lineal $\underset{\beta}{V_n} \xrightarrow[A]{T} \underset{\beta'}{W_m}$

Si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ordenada de V y $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ es una base ordenada de W, entonces la **matriz de T respecto de las bases ordenadas β y β'** denotado por $A_{m\times n}$ se obtiene de resolver:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{a_{ij}}_{A_{m\times n}} w_i \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$m = dim(W)$$
$$n = dim(V)$$

- Ahora, cómo se halla la matriz de un operador lineal $T: V \longrightarrow V$ cuando tenemos **sólo una base ordenada** $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V.

Sea el operador lineal $V_n \xrightarrow[A=[T]_\beta]{T} V_n$, donde $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ordenada de V.

La matriz de T en la base β, denotado por $[T]_\beta$, se obtiene de resolver:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$(a_{ij}) = [T]_\beta = A_n \ , \quad n = \dim(V).$$

- Si en el operador lineal $T: \underset{\beta}{V_n} \longrightarrow \underset{\beta'}{V_n}$ hubieran dos bases ordenadas $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ de V_n, tenemos:

a) $[T]_\beta = A$: matriz de T en la base β, que se halla resolviendo

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{A}\, v_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

b) $[T]_{\beta'} = B$: matriz de T en la base β', que se halla resolviendo

$$T(w_j) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{b_{ij}}_{B}\, w_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

c) **Existe un único operador lineal U que aplica β sobre β', $U: \beta \longrightarrow \beta'$, definido por $U(v_j) = w_j$, $j = 1, 2, \dots n$. Este operador U es invertible, ya que aplica una base de V sobre la base de V.**

La matriz del operador U en la base ordenada β es P, que se obtiene al resolver:

$$U(v_j) = W_j = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P_{ij}}_{P}\, v_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y como $w_j = U(v_j)$ entonces $U(v_j)=\sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, v_i$.

Así $P=[U]_\beta$ por definición.

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad P=[P_1, P_2, \ldots, P_n]$$

(columnas P_1, P_2, …, P_n) son las columnas de P

P es la matriz de cambio de base desde una base β hasta otra β' en un espacio vectorial V. $(\beta' \xrightarrow{P} \beta)$.

d) Las columnas P_j de P son las coordenadas del vector w_j en la base β, que se denota por $P_j=[w_j]_\beta$

se lee "las coordenadas de w_j en la base β"

e) Conocido la matriz P, las coordenadas de cualquier vector $v \in V$ en la base β, se halla haciendo el siguiente producto:

$$[v]_\beta = P[v]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$[v]_{\beta'}$: coordenadas de v en la base β'

$\beta' \xrightarrow{P} \beta$

$v \longmapsto v$

$[v]_\beta = P[v]_{\beta'}$

P es invertible.

f) Las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β, por definición, es:

$$[T(v)]_\beta = \underbrace{[T]_\beta}_{A}[v]_\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

g) Aplicando (1) al vector $T(v)$, tenemos:

$$[T(v)]_\beta = P[T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

h) (2) en (3):

$$\underbrace{[T]_\beta}_{A}[v]_\beta = P[T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

i) En (4), multiplicar por izquierda la matriz P^{-1}

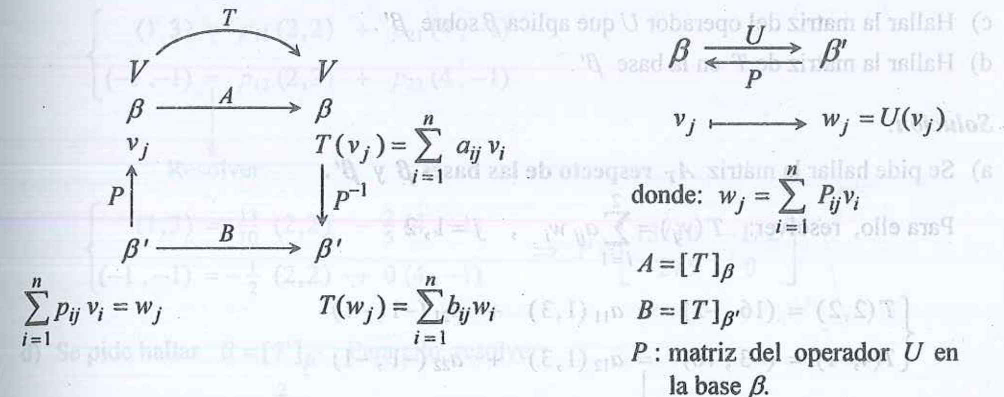
$$\underbrace{P^{-1}[T]_\beta}_{A}[v]_\beta = [T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

j) (1) en (5): $\underbrace{P^{-1}[T]_\beta P}_{B}[v]_{\beta'} = [T(v)]_{\beta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$

La igualdad obtenida en (6) nos indica que $B=P^{-1}AP$ es la matriz de T en la base β', y por lo tanto, la igualdad: $[T(v)]_{\beta'} = B[v]_{\beta'}$ nos permite hallar las coordenadas del vector $T(v)$ en la base β', multiplicando la matriz B por la matriz columna $[v]_{\beta'}$.

$[v]_{\beta'}$ son las coordenadas de v en la base β'

En el diagrama, se observa que $B=P^{-1}AP$



7.8 TEOREMA 18

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$, y sean

$$\beta=\{v_1, \ldots, v_n\} \quad \text{y} \quad \beta'=\{w_1, \ldots, w_n\}$$

dos bases ordenadas de V. Supóngase que $T: V \longrightarrow V$ es un operador lineal sobre V. Si $P=[P_1, P_2, \ldots, P_n]$ es la matriz $n \times n$ de columnas $P_j=[w_j]_\beta$, entonces:

$$\underbrace{[T]_{\beta'}}_{B} = P^{-1}\underbrace{[T]_\beta}_{A} P$$

$$B = P^{-1} A P$$

De otra manera, si U es el operador lineal sobre V, definido por $U(v_j)=w_j$, $j=1,\ldots,n$, entonces $[T]_{\beta'}=[U]_\beta^{-1}\,[T]_\beta\,[U]_\beta$.

Demostración (está hecho, líneas arriba).

Ejemplo 3 Sea T el operador lineal en $I\!R^2$ definido por:

$T(x_1, x_2)=(x_1+7x_2\,,\,3x_1-4x_2)$ y sean

$$\beta=\{\underbrace{(2,2)}_{v_1},\underbrace{(4,-1)}_{v_2}\} \quad y \quad \beta'=\{\underbrace{(1,3)}_{w_1},\underbrace{(-1,-1)}_{w_2}\}$$

a) Hallar la **matriz de T respecto de las bases ordenadas β y β'.**

b) Hallar la matriz de T en la base β.

c) Hallar la matriz del operador U que aplica β sobre β'.

d) Hallar la matriz de T en la base β'.

Solución:

a) **Se pide hallar la matriz A_T respecto de las bases β y β'.**

Para ello, resolver: $T(v_j)=\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\,w_i \quad , \quad j=1,2$

$$\begin{cases} T(2,2)=(16,-2)=a_{11}(1,3)+a_{21}(-1,-1)\\ T(4,-1)=(-3,16)=a_{12}(1,3)+a_{22}(-1,-1)\end{cases}$$

$\downarrow$ Resolver:

$$\begin{cases}(16,-2)=-9(1,3)-25(-1,-1)\\ (-3,16)=\frac{19}{2}(1,3)+\frac{25}{2}(-1,-1)\end{cases}$$

La matriz de T respecto de las bases ordenadas β y β' es: $A_T=\begin{bmatrix}-9 & 19/2\\ -25 & 25/2\end{bmatrix}$

b) Se pide hallar: $A=[T]_\beta$

Resolver: $T(v_j)=\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\,v_i \quad , \quad j=1,2$

$$\begin{cases} T(2,2)=(16,-2)=a_{11}(2,2)+a_{21}(4,-1)\\ T(4,-1)=(-3,16)=a_{12}(2,2)+a_{22}(4,-1)\end{cases}$$

$\downarrow$ Resolver:

$$\begin{cases}(16,-2)=\frac{4}{5}(2,2)+\frac{18}{5}(4,-1)\\ (-3,16)=\frac{61}{10}(2,2)-\frac{19}{5}(4,-1)\end{cases} \Rightarrow A=[T]_\beta=\begin{bmatrix}4/5 & 61/10\\ 18/5 & -19/5\end{bmatrix}$$

c) **Se pide hallar la matriz P. Para ello, resolver:**

$$w_j=\sum_{i=1}^{2} P_{ij}\,v_i \quad , \quad j=1,2.$$

$$\begin{cases}(1,3)=p_{11}(2,2)+p_{21}(4,-1)\\ (-1,-1)=p_{12}(2,2)+p_{22}(4,-1)\end{cases}$$

$\downarrow$ Resolver:

$$\begin{cases}(1,3)=\frac{13}{10}(2,2)-\frac{2}{5}(4,-1)\\ (-1,-1)=-\frac{1}{2}(2,2)+0(4,-1)\end{cases} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}13/10 & -1/2\\ -2/5 & 0\end{bmatrix}$$

d) **Se pide hallar $B=[T]_{\beta'}$. Para ello, resolver:**

$$T(w_j)=\sum_{i=1}^{2} b_{ij}\,w_i \quad , \quad j=1,2.$$

$$\begin{cases}T(1,3)=(22,-9)=b_{11}(1,3)+b_{21}(-1,-1)\\ T(-1,-1)=(-8,1)=b_{12}(1,3)+b_{22}(-1,-1)\end{cases}$$

$\downarrow$ Resolver:

$$\begin{cases}(22,-9)=-\frac{31}{2}(1,3)-\frac{75}{2}(-1,-1)\\ (-8,1)=\frac{9}{2}(1,3)+\frac{25}{2}(-1,-1)\end{cases} \Rightarrow B=[T]_{\beta'}=\begin{bmatrix}-31/2 & 9/2\\ -75/2 & 25/2\end{bmatrix}$$

También, se puede hallar mediante el siguiente producto

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 61/10 \\ 18/5 & -19/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31/2 & 9/2 \\ -75/2 & 25/2 \end{bmatrix}$$

7.9 **TEOREMA 19:** (MATRIZ DE CAMBIO DE BASE – GENERALIZACIÓN)

Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal de V en W.
$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Sean $\beta = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ y $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots\ldots, v_n'\}$ dos bases de V

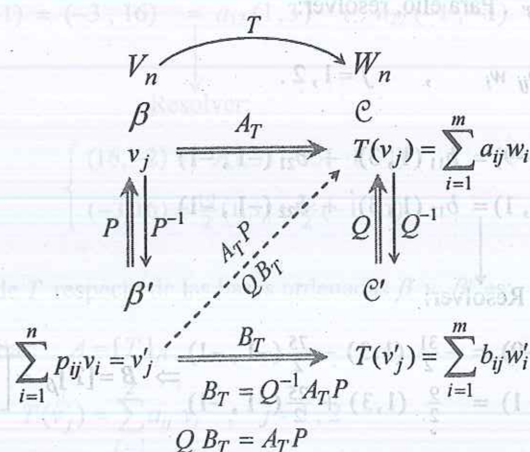
Sean $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m\}$ y $\mathcal{C}' = \{w_1', w_2', \ldots\ldots, w_m'\}$ dos bases de W

Sea $P = (p_{ij}) \in K^{n\times n}$ la matriz de pasaje de β' a β, $\quad v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$

Sea $Q = q_{kj} \in K^{m\times m}$ la matriz de pasaje de $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$, $\quad w_j' = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} w_k$

Sea $A_T = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ es la matriz de pasaje de β a $\mathcal{C}$, $\quad T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

$\Rightarrow B_T = Q^{-1} A_T P$ es la matriz de pasaje de β' a $\mathcal{C}'$, $\quad T(v_j') = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k'$



$$U : \beta \xrightarrow{P} \beta' \qquad\qquad H : \mathcal{C} \xrightarrow{Q} \mathcal{C}'$$

$$v_j \longmapsto U(v_j) = v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \qquad\qquad w_j \longmapsto H(w_j) = w_j' = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} w_k$$

Los operadores U y H son isomorfismos y por tanto tienen inversa.

P : Se llama matriz de cambio de base β' en β, porque las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base β' es:

$$[v]_{\beta'} = P[v]_{\beta}$$

Q : Se llama matriz de cambio de base de $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{C}$, porque las coordenadas de un vector $w \in W$ en la base $\mathcal{C}'$ es:

$$[w]_{\mathcal{C}'} = Q[w]_{\mathcal{C}}.$$

***Demostración*:**

Bastará demostrar: $QB_T = A_T P$

1. **La imagen, por T, de cada v_j' es $T(v_j')$ y cada $T(v_j')$ es combinación lineal de los w_k' esto es,**

$$T(v_j') = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k', \quad j = 1, \ldots\ldots, n$$

Ahora, trabajemos con el primer miembro y con el segundo miembro separadamente.

2. **Cuando se trabaja con el primer miembro: $T(v_j')$ hacemos lo siguiente:**

Cada v_j' es combinación lineal de $\{v_1, \ldots v_n\}$, esto es:

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

Aplicar T: $\quad T(v'_j) = T\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, v_i\right) \quad , \; j = 1, \ldots\ldots, n$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, T(v_i) \quad , \quad \text{pero } T(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, p_{ij}\, w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, p_{ij} \right) w_k \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

3. Al trabajar con el segundo miembro: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\, w'_k \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$

se tiene $w'_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_{ik}\, w_i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$

(3) en (2): $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{kj} \sum_{i=1}^{m} q_{ik} w_i$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} q_{ik}\, b_{kj}\, w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} q_{ik}\, b_{kj} \right) w_i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (4)$$

4. Comparando (4) con (1), obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{m} q_{ik}\, b_{kj} \; = \; \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, p_{ij} \qquad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m \end{cases}$$

$$Q_{m\times m}\, B_{m\times n} \; = \; A_{m\times n}\, P_{n\times n}$$

La relación entre las matrices A y B, dan lugar a las siguientes definiciones:

a) ***Definición 1***.- Dado dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, decimos que B es **equivalente** a A sí, y sólo si existen matrices no singulares $P \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $B = PAQ$.

b) ***Definición 2***.- Sean A y B dos matrices (cuadradas) $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que B es **semejante** a A sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz inversible $n \times n$ P, sobre $\mathbb{K}$ tal que $B = P^{-1} A\, P$.

c) Dado dos matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que:
B es **congruente** a A si, y sólo si, existe una matriz cuadrada $n \times n$ P, no singular, tal que $B = PAP^t$.

Las definiciones dadas en a), b) y c) son relaciones de equivalencia.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n
Si se tiene un operador lineal $T: V \longrightarrow V$
y dos bases ordenadas de V, $B = \{v_1 \ldots . v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$; entonces:

$[v]_{B'} = P[v]_B$

$v'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, v_i$

$v \in V$

$$\begin{matrix} V & \xrightarrow{\;T\;} & V \\ \beta & P & \beta' \\ v & \longrightarrow & v \end{matrix}$$

$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$: coordenadas del vector v en la base B'

$v = \beta_1 v'_1 + \ldots + \beta_n v'_n$

P : matriz $n{\times}n$ de pasaje de B' a B

$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$: coordenadas del vector v en la base B

$v = \alpha_1\, v_1 + \ldots + \alpha_n\, v_n$

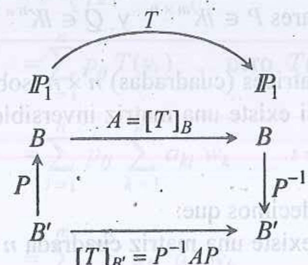
Ejemplo 1

Sea $T: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ definida por $T(a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1 (x+1)$

B y B' son las bases de $\mathbb{P}_1$, donde: $\quad B = \{P_1, P_2\}$, $P_1 = 6 + 3x$, $P_2 = 10 + 2x$
$B' = \{q_1, q_2\}$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3 + 2x$

Se pide: a) Hallar la matriz de T en la base ordenada de B
b) Hallar la matriz de T en la base ordenada de B'

Solución:



Como IP_1 es un conjunto de polinomios, se trabaja con los valores de los coeficientes a_0 y a_1

a) Cálculo de $[T]_B$ = matriz de T en la base ordenada B.

$$T(p_j)=\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\,q_i \quad , \quad j=1,2 \quad \text{donde} \quad [T]_B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

PASO 1: Hallar la imagen de cada p_i según T.

$$\begin{cases} T(6+3x) = 6+3(x+1) \\ T(10+2x) = 10+2(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(6+3x) = 9+3x \\ T(10+2x) = 12+2x \end{cases}$$

PASO 2: Expresar $9+3x$ y $12+2x$ como combinación de $\{p_1, p_2\} = B$

$$T(6+3x) = \overbrace{9+3x = a_{11}p_1 + a_{21}p_2}^{*}$$
$$T(10+2x) = 12+2x = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$$

Resolver el sistema (*):

$$\begin{cases} 9+3x = a_{11}(6+3x) + a_{21}(10+2x) \\ 12+2x = a_{12}(6+3x) + a_{22}(10+2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9+3x = (6a_{11}+10a_{21}) + (3a_{11}+2a_{21})\,x \\ 12+2x = (6a_{12}+10a_{22}) + (3a_{12}+2a_{22})\,x \end{cases}$$

Por identidad de polinomios:

$$\begin{cases} 6a_{11}+10a_{21}=9 \\ 3a_{11}+2a_{21}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a_{12}+10a_{22}=12 \\ 3a_{12}+2a_{22}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}=1/2 \\ a_{11}=2/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{22}=4/3 \\ a_{12}=-2/9 \end{cases} \quad , \quad \text{Luego } A=[T]_B=\begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo de $[T]_{B'}$ = matriz de T en la base ordenada B'

Fórmula: $[T]_{B'} = P^{-1}AP$

Hallemos P = matriz de cambio de base B' en B.

$$q_j=\sum_{i=1}^{2}\alpha_{ij}p_i \quad , \quad P=[\alpha_{ij}]$$

$$\begin{cases} q_1=\alpha_{11}p_1+\alpha_{21}p_2 \\ q_2=\alpha_{12}p_1+\alpha_{22}p_2 \end{cases} \qquad P=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2=\alpha_{11}(6+3x)+\alpha_{21}(10+2x) \\ 3+2x=\alpha_{12}(6+3x)+\alpha_{22}(10+2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2=(6\alpha_{11}+10\alpha_{21})+(3\alpha_{11}+2\alpha_{21})\,x \\ 3+2x=(6\alpha_{12}+10\alpha_{22})+(3\alpha_{12}+2\alpha_{22})\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\alpha_{11}+10\alpha_{21}=2 \\ 3\alpha_{11}+2\alpha_{21}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\alpha_{12}+10\alpha_{22}=3 \\ 3\alpha_{12}+2\alpha_{22}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{21}=1/3 \\ \alpha_{11}=-2/9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{22}=-1/6 \\ \alpha_{12}=7/9 \end{cases}$$

Luego: $P=\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$

Fórmula: $[T]_{B'} = P^{-1}AP$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OTRA FORMA DE HALLAR $[T]_{B'}$

$$\begin{cases} T(2) = 2 + 0\,(x+1) \\ T(3+2x) = 3 + 2\,(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(2) = 2 \\ T(3+2x) = 5+2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = b_{11}\,(2) + b_{21}\,(3+2x) \\ 5+2x = b_{12}\,(2) + b_{22}\,(3+2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = (2b_{11} + 3b_{21}) + 2b_{21}x \\ 5+2x = (2b_{12} + 3b_{22}) + 2b_{22}x \end{cases}$$

Al resolver obtenemos: $\begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{11} = 1 \\ b_{22} = 1 \\ b_{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow [T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Supóngase que $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$, está definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$. Hállese A_T con respecto a la base $B_1 = B_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$

Solución:

PASO 1. Hallar las imágenes de los vectores $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ por T.

Así: $T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-2) \\ 2(1)+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2(2) \\ 2(3)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

PASO 2. Expresar cada vector $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\{b_1, b_2\}$.

Así: $\begin{cases} (1) \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (2) \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ donde $A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 5/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

PASO 3. Hallar los escalares a_{ij}

De (1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 3a_{21} \\ -2a_{11} + 2a_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 3a_{21} = 5 \\ -2a_{11} + 2a_{21} = 0 \end{cases}$

$a_{21} = 5/4$, $a_{11} = 5/4$

De (2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + 3a_{22} \\ -2a_{12} + 2a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} + 3a_{22} = -1 \\ -2a_{12} + 2a_{22} = 8 \end{cases}$

$a_{22} = \frac{3}{4}$

$a_{12} = -13/4$

EL PROBLEMA DE CAMBIO DE BASE

Comentemos sobre las tres versiones relativas a la matriz de cambio de base.

Sean $[v]$ y $[v']$ bases de V_n ; $[w]$ y $[w']$ bases de W_m

1ra VERSIÓN

$V_n \xrightarrow{T} W_m$

$[v] \xrightarrow{A} [w]$; P, P^{-1} entre $[v]$ y $[v']$; Q de $[w]$ a $[w']$; AP^{-1} de $[v']$ a $[w]$

$[v'] \longrightarrow [w']$, $B = QAP^{-1}$

2da VERSIÓN

$V_n \xrightarrow{T} W_m$

$[v] \xrightarrow{A} [w]$; P de $[v']$ a $[v]$; Q, Q^{-1} entre $[w]$ y $[w']$; AP de $[v']$ a $[w]$

$[v'] \longrightarrow [w']$, $B = Q^{-1}AP$

Aquí se tiene (1ra versión):

a) $[v] \xrightarrow{P} [v']$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} V_i'$$

P es la matriz de pasaje de $[v]$ a $[v']$

b) $[w] \xrightarrow{Q} [w']$

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} q_{ki}\, w_k'$$

Q es la matriz de pasaje de $[w]$ a $[w']$

c) A es la matriz de pasaje de $[v]$ a $[w]$

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$$

d) B es matriz de pasaje de $[v']$ a $[w']$

$$T(v_j') = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, w_i'$$

Aquí se tiene (2da versión):

a) $[v'] \xrightarrow{P} [v]$

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, V_i'$$

P es la matriz de transición de $[v']$ a $[v]$

b) $[w'] \longrightarrow [w]$

$$w_i' = \sum_{k=1}^{m} q_{ki}\, w_k$$

Q es la matriz de transición de $[w']$ a $[w]$

c) A es la matriz de T respecto a la base $[v]$.

d) B es la matriz T en la base $[v']$.

estas dos versiones son similares

La pequeña diferencia es: Lo que en la 1ª versión es P^{-1}, en la 2ª versión es P.

Lo que en la 1ª versión es Q, en la 2ª versión es Q^{-1}. Todo depende cómo se construye la combinación lineal y de dónde a dónde.

En ambas versiones, la combinación lineal se toma a partir de los vectores del conjunto de PARTIDA.

En la 1ª versión $[V] \xrightarrow{P} [V']$ — $[V]$: *Conjunto de partida*

En la 2ª versión $[V'] \xrightarrow{P} [V]$ — $[V']$: *Conjunto de partida*

La 3ª versión, es idéntico a la 2ª versión, la única diferencia radica en la "redacción"

En la 2ª versión, la notación $[V'] \xrightarrow{P} [V]$

indica que: $$v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i'$$

y afirmamos que P es la matriz de transición de $[V']$ a $[V]$

En la 3ª versión se dice: P es la matriz de pasaje de $[V]$ a $[V']$

En la 2ª versión, la notación $[W'] \xrightarrow{Q} [W]$

indica que: $$w_i = \sum_{k=1}^{m} q_{ki}\, w_k$$

y afirmamos que Q es la matriz de tránsito de $[W']$ a $[W]$

En la 3ª versión se dice Q es la matriz de pasaje de $[W]$ a $[W']$

Ejemplo 3.

Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ una transformación lineal definido por
$T(x,y,z) = (x+y-z\,,\,x-y)$

a) Hallar la matriz de T respecto de las bases canónicas en $I\!R^3$ y en $I\!R^2$

b) Hallar las matrices de pasaje de las bases anteriores a las bases:

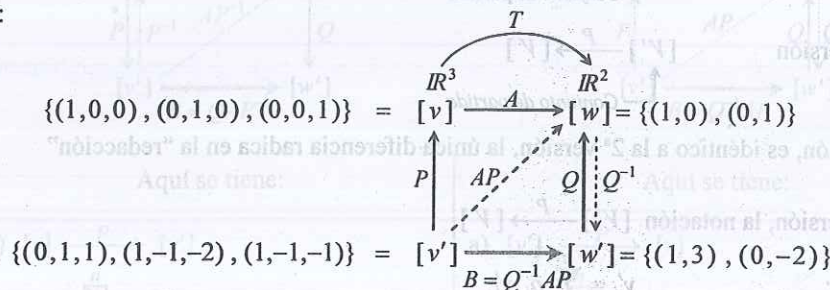
$$[V'] = \{(0,1,1)\,,\,(1,-1,-2)\,(1,-1,-1)\}$$
$$[W'] = \{(1,3)\,,\,(0,-2)\}$$

c) Calcular la matriz B de T, respecto del nuevo par de bases dados en b)

Solución:

Sugiero al estudiante hacer un diagrama de flechas para que pueda operar con gran facilidad. Este diagrama de flechas es la composición de cuatro funciones:

Así:



Trabajemos con la 2° versión:

(1) Hallar A.

1° Hallar la imagen de cada vector de $[v]$ mediante la aplicación T:

$$T(x\,,y\,,z) = (x+y-z\,,\,x-y)$$

$$(\alpha)\begin{cases} T(1,0,0) = (1,1) \\ T(0,1,0) = (1,-1) \\ T(0,0,1) = (-1,0) \end{cases}$$

2° Expresar cada vector de (α) como combinación lineal de los vectores de $[w]$

$$\begin{cases} (1,1) = \underbrace{a_{11}}_{1}(1,0) + \underbrace{a_{21}}_{1}(0,1) \\ (1,-1) = \underbrace{a_{12}}_{1}(1,0) + \underbrace{a_{22}}_{-1}(0,1) \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (-1,0) = \underbrace{a_{13}}_{-1}(1,0) + \underbrace{a_{23}}_{0}(0,1) \end{cases}$$

(2) Hallar P:

$$\begin{cases} (0,1,1) = \underbrace{P_{11}}_{0}(1,0,0) + \underbrace{P_{21}}_{1}(0,1,0) + \underbrace{P_{31}}_{1}(0,0,1) \\ (1,-1,-2) = \underbrace{P_{12}}_{1}(1,0,0) + \underbrace{P_{22}}_{-1}(0,1,0) + \underbrace{P_{32}}_{-2}(0,0,1) \quad \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ (1,-1,-1) = \underbrace{P_{13}}_{1}(1,0,0) + \underbrace{P_{23}}_{-1}(0,1,0) + \underbrace{P_{33}}_{-1}(0,0,1) \end{cases}$$

(3) Hallar Q:

$$\begin{cases} (1,3) = \underbrace{q_{11}}_{1}(1,0) + \underbrace{q_{21}}_{3}(0,1) \\ \qquad\qquad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ (0,-2) = \underbrace{q_{12}}_{0}(1,0) + \underbrace{q_{22}}_{-2}(0,1) \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

(4) Hallar B: si miramos el diagrama de flechas veremos que hay composición de cuatro funciones, donde:

$$B = Q^{-1}\,AP$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(5) Sin necesidad de usar la fórmula $B = Q^{-1}AP$, la matriz B se puede obtener directamente aplicando T a los vectores de la base $[V']$ y haciendo la correspondiente combinación lineal de los vectores $T(v'_j)$ con los vectores de la base $[W']$.

Así: $T(x, y, z) = (x+y-z,\ x-y)$

$$\overbrace{T(0,1,1) = (1,-1)}^{1^\circ} = \overbrace{\underbrace{b_{11}}_{0}(1,3) + \underbrace{b_{21}}_{1/2}(0,-2)}^{2^\circ}$$

$$T(0,-1,-2) = (2,2) = \underbrace{b_{12}}_{2}(1,3) + \underbrace{b_{22}}_{2}(0,-2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T(1,-1,-1) = (1,2) = \underbrace{b_{13}}_{1}(1,3) + \underbrace{b_{23}}_{1/2}(0,-2)$$

Entonces la matriz B es: $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4 Sea $T: I\!P_1 \longrightarrow I\!P_2$ una transformación lineal definida por $T(p(x)) = xp(x)$
Hallar la matriz de T con respecto a las bases $B = \{q_1, q_2\}$, $B' = \{p_1, p_2, p_3\}$

Donde $\begin{cases} q_1(x) = 1 \\ q_2(x) = x \end{cases}$ $\begin{cases} p_1(x) = 1 + 2x + x^2 \\ p_2(x) = 2 + 9x \\ p_3(x) = 3 + 3x + 4x^2 \end{cases}$

Solución:

En primer lugar hallemos las imágenes de $\begin{cases} q_1 = \overbrace{0x+1}^{(ax+b)\in I\!P_1} \\ q_2 = x + 0 \end{cases}$ por T

Así:
$$\begin{cases} T(0x+1) = x(0x+1) \\ \qquad = 0x^2 + x \\ T(x+0) = x(x+0) \\ \qquad = x^2 + 0x \end{cases}$$

En segundo lugar expresar los vectores $\begin{cases} \overbrace{0x^2 + x + 0}^{(ax^2+bx+c)\in I\!P_2} \\ x^2 + 0x + 0 \end{cases}$

como combinación lineal de P_1, P_2 y P_3.

Así: $\begin{cases} (1)\ \ 0x^2 + x + 0 = a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + a_{31}P_3 \\ (2)\ \ x^2 + 0x + 0 = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + a_{32}P_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

En tercer lugar, debemos hallar la matriz A resolviendo cada uno de los sistemas de ecuaciones que se obtiene de (1) y (2), respectivamente.

Veamos:

De (1): $0x^2 + x + 0 = a_{11}(1 + 2x + x^2) + a_{21}(2 + 9x) + a_{31}(3 + 3x + 4x^2)$
$= (a_{11} + 4a_{31})x^2 + (2a_{11} + 9a_{21} + 3a_{31})x + (a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31})$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 4a_{31} = 0 \\ 2a_{11} + 9a_{21} + 3a_{31} = 1 \\ a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 0 \end{cases} \text{ al resolver obtenemos } \begin{cases} a_{11} = 8 \\ a_{21} = -1 \\ a_{31} = -2 \end{cases}$$

De (2): $x^2 + 0x + 0 = a_{12}(1 + 2x + x^2) + a_{22}(2 + 9x) + a_{32}(3 + 3x + 4x^2)$
$= (a_{12} + 4a_{32})x^2 + (2a_{12} + 9a_{22} + 3a_{32})x + (a_{12} + 2a_{22} + 3a_{32})$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12} + 4a_{32} = 1 \\ 2a_{12} + 9a_{22} + 3a_{32} = 0 \\ a_{12} + 2a_{22} + 3a_{32} = 0 \end{cases} \text{ al resolver obtenemos } \begin{cases} a_{12} = 21 \\ a_{22} = -3 \\ a_{32} = -5 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz de T con respecto a las bases ordenadas B y B' es: $A = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

Ejemplo 5 Sea $T: I\!P_2 \longrightarrow I\!P_1$ la transformación lineal definida por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

Solución:

1) La base canónica de $I\!P_2$ es $B = \{1, x, x^2\}$, donde $I\!P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 / a_i \in I\!R\}$

La base canónica de $I\!P_1$ es $B' = \{1, x\}$, donde $I\!P_1 = \{b_0 + b_1x / b_i \in I\!R\}$

2) Como T es una t.l de $I\!P_2$ en $I\!P_1$, entonces hallemos las imágenes de cada una de los vectores de B.

De: $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$

$$\begin{cases} T(1+0.x+0.x^2) = (1+0) - (2(0)+3(0))x \\ \qquad T(1) = 1 \\ T(0+1.x+0.x^2) = (0+1) - (2(1)+3(0))x \\ \qquad T(x) = 1-2x \\ T(0+0.x+1.x^2) = (0+0) - (2(0)+3(1))x \\ \qquad T(x^2) = -3x \end{cases}$$

3) Ahora: expresemos cada polinomio $T(1)$, $T(x)$, $T(x^2)$ como combinación lineal de los vectores de la base B'.

Así:

$$\begin{cases} 1+0x = a_{11}(1) + a_{21}(x) \\ 1-2x = a_{12}(1) + a_{22}(x) \\ 0-3x = a_{13}(1) + a_{23}(x) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1+0x = a_{11} + a_{21}x & \text{(I)} \\ 1-2x = a_{12} + a_{22}x & \text{(II)} \\ 0-3x = a_{13} + a_{23}x & \text{(III)} \end{cases}$$

Al igualar coeficientes obtenemos:

En (I) : $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$
En (II) : $a_{12} = 1$, $a_{22} = -2$
En (III) : $a_{13} = 0$, $a_{23} = -3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6 Sea $T: M_{22} \longrightarrow M_{22}$ el operador lineal definido como: $T(A) = A^t$ encuentre la matriz de T con respecto a la base $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ donde:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ S es la base canónica de M_{22}

Solución:

En primer lugar, hallamos las imágenes por T de M_1, M_2, M_3 y M_4. Así:

$$T(M_1) = M_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T(M_2) = M_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(M_3) = M_3^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T(M_4) = M_4^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En segundo lugar, expresar cada vector $T(M_i)$ como combinación lineal de los vectores M_i.

Así:

$$\begin{cases} (1) & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{41}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{32}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{42}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_{13}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{43}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_{14}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{24}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{34}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{44}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Al resolver, respectivamente cada ecuación, obtenemos:

De (1)	De (2)	De (3)	De (4)
$a_{11}=1$	$a_{12}=0$	$a_{13}=0$	$a_{14}=0$
$a_{21}=0$	$a_{22}=0$	$a_{23}=1$	$a_{24}=0$
$a_{31}=0$	$a_{32}=1$	$a_{33}=0$	$a_{34}=0$
$a_{41}=0$	$a_{42}=0$	$a_{43}=0$	$a_{44}=1$

Luego la matriz de T respecto a la base S, es: $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Ejemplo 7 Sea V el espacio generado por $f_1 = sen\,x$ y $f_2 = cos\,x$.

a) Demuestre que $g_1 = 2\,sen\,x + cos\,x$ y $g_2 = 3\,cos\,x$ forman una base de V.

b) Encuentre la matriz de transición de $B=\{f_1, f_2\}$ a $B'=\{g_1, g_2\}$

c) Calcule la matriz de coordenadas $[h]_{B'}$, donde $h = 2\,sen\,x - 5\,cos\,x$, y utilice el Teorema para obtener $[h]_{B'}$.

d) Compruebe sus respuestas calculando $[h]_{B'}$ directamente.

e) Encuentre la matriz de transición de B' a B.

Queda como ejercicio. Respuesta: $\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/6 & 1/3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}$

Ejemplo 8 Sea $D: P_2 \longrightarrow P_2$ el operador derivación dado por $D(P)=P'$ donde:

$P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$

$P_2 = \{P(x)\,/\,P(x)$ es un polinomio en $I\!R$ de grado $\le 2\}$

a) Hallar la matriz que representa a D en la base ordenada $\{q_0, q_1, q_2\}$ de P_2, donde $q_0(x)=1$, $q_1(x)=-x$, $q_2(x)=2x+x^2$, $\forall\, x \in I\!R$.

b) ¿Tiene D valores propios reales?. Justificar su respuesta.

Solución:

a) El operador derivación $D: P_2 \longrightarrow P_2$ esta definido por $D(P)=P'$

Según esta definición: a $q_0(x)$ corresponda $q_0' = 0$

a $q_1(x)$ " $q_1' = -1$

a $q_2(x)$ " $q_2' = 2+2x$

A continuación expresemos los polinomios q_0', q_1' y q_2' como combinación lineal de la base $\{q_0, q_1, q_2\}$ de P_2.

Así obtendremos:

$$\begin{cases} q_0' = a_{11}\;q_0 + a_{21}\;q_1 + a_{31}\;q_2 \\ q_1' = a_{12}\;q_0 + a_{22}\;q_1 + a_{32}\;q_2 \\ q_2' = a_{13}\;q_0 + a_{23}\;q_1 + a_{33}\;q_3 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}\,(1) + a_{21}\,(-x) + a_{31}\,(2x+x^2) \\ -1 = a_{12}\,(1) + a_{22}\,(-x) + a_{32}\,(2x+x^2) \\ 2+2x = a_{13}\,(1) + a_{23}\,(-x) + a_{33}\,(2x+x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{31}\,x^2 + (2a_{31} - a_{21})\,x + a_{11} & (1) \\ -1 = a_{32}\,x^2 + (2a_{32} - a_{22})\,x + a_{12} & (2) \\ 2+2x = a_{33}\,x^2 + (2a_{33} - a_{23})\,x + a_{13} & (3) \end{cases}$$

Aplicando la identidad de polinomios, resolvemos cada uno de los sistemas de ecuaciones que se obtienen de (1), (2) y (3), respectivamente.

De (1): $\begin{cases} a_{31} = 0 \\ 2a_{31} - a_{21} = 0 \\ a_{11} = 0 \end{cases}$ obtenemos $\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$

De (2): $\begin{cases} a_{32}=0 \\ 2a_{32}-a_{22}=0 \\ a_{12}=-1 \end{cases}$ obtenemos $\begin{cases} a_{12}=-1 \\ a_{22}=0 \\ a_{32}=0 \end{cases}$

De (3): $\begin{cases} a_{33}=0 \\ 2a_{33}-a_{23}=2 \\ a_{13}=2 \end{cases}$ obtenemos $\begin{cases} a_{13}=2 \\ a_{23}=-2 \\ a_{33}=0 \end{cases}$

Por tanto, la matriz que representa a D en la base $\{q_0, q_1, q_2\}$ es: $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Los valores propios de A son los mismos para D. Por tanto, resolver la ecuación:

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda^3=0$$

El único valor real es $\lambda=0$. $\quad \Rightarrow \quad \lambda=0$

Ejemplo 9 Sea V el espacio vectorial real $I\!R^3$ con la base usual, W es un subespacio vectorial real de $I\!R^3$ en la base:

$$B_2=\left\{\underset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}\right\}$$

Sea la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ definida por $T(P)=A\times P$

Donde $A=(2,-1,2)$.

Hallar la representación matricial de T.

Solución:

Según la definición $T: V \longrightarrow W$
$\qquad P \longrightarrow A\times P$

Indica que "a cada vector $P \in V = I\!R^3$ corresponde el vector $(A\times P)\in W$"

Para hallar la representación matricial de T debemos hallar, en primer lugar, la imagen por T, de cada vector de la base usual de $I\!R^3$.

La base usual de $I\!R^3$ es $\{\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}\}$

Como $\qquad T(P) = A\times P$

Entonces:
a) $T\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} = (2,-1,2)\times(1,0,0) = (0,2,1)$

b) $T\underbrace{(0,1,0)}_{e_2} = (2,-1,2)\times(0,1,0) = (-2,0,2)$

c) $T\underbrace{(0,0,1)}_{e_3} = (2,-1,2)\times(0,0,1) = (-1,-2,0)$

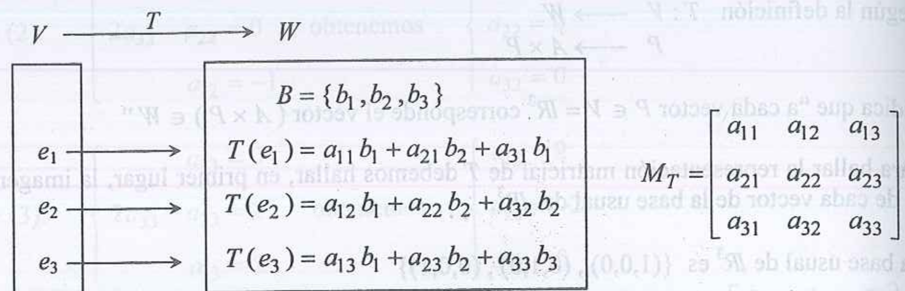
donde:

a) $(2,-1,2)\times(1,0,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=i(0)-j(0-2)+k(0+1)=(0,2,1)$

b) $(2,-1,2)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=i(-2)-j(0)+k(2)=(-2,0,2)$

c) $(2,-1,2)\times(0,0,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i(-1)-j(2)+k(0)=(-1,-2,0)$

Haciendo un diagrama de Venn, tenemos:



En segundo lugar, expresar cada vector $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$ como combinación lineal de los vectores de la base B_2.

Así:
$$\begin{cases} (0,2,1) = a_{11}(1,0,-1)+a_{21}(1,4,1)+a_{31}(2,-1,2) \;\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ (-2,0,2) = a_{12}(1,0,-1)+a_{22}(1,4,1)+a_{32}(2,-1,2) \;\ldots\ldots\ldots\; (2) \\ (-1,-2,0) = a_{13}(1,0,-1)+a_{23}(1,4,1)+a_{33}(2,-1,2) \;\ldots\ldots\ldots\; (3) \end{cases}$$

Resolver, el sistema (1), (2) y (3) respectivamente:

$$(1)\begin{cases} a_{11}+a_{21}+2a_{31}=0 \\ 4a_{21}-a_{31}=2 \\ -a_{11}+a_{21}+2a_{31}=1 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} a_{12}+a_{22}+2a_{32}=-2 \\ 4a_{22}-a_{32}=0 \\ -a_{12}+a_{22}+2a_{32}=2 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} a_{13}+a_{23}+2a_{33}=-1 \\ 4a_{23}-a_{33}=-2 \\ -a_{13}+a_{23}+2a_{33}=0 \end{cases}$$

AL RESOLVER | **AL RESOLVER** | **AL RESOLVER**

$$\begin{cases} a_{11}=-1/2 \\ a_{21}=1/2 \\ a_{31}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12}=-2 \\ a_{22}=0 \\ a_{32}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13}=-1/2 \\ a_{23}=-1/2 \\ a_{33}=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la representación **MATRICIAL** de T es: $M_T=\begin{bmatrix} -1/2 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 10 (Matriz cambio de base)

Sean $B_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

dos bases ordenadas de $I\!R^3$.

i) **Hallar la matriz de transacción de la base B_1 a la base B_2.**

ii) **Sea $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ las coordenadas del vector $X \in I\!R^3$ en la base B_1.**

Hallar las coordenadas de X en la base B_2.

Solución:

i) **La matriz de transición lineal de la base B_1 a la base B_2, se obtiene expresando cada vector de B_1 como combinación lineal de los vectores de B_2.**

Así:

$$B_1 \xrightarrow{P} B_2 \begin{cases} \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=P_{11}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+P_{21}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+P_{31}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=P_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+P_{22}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+P_{32}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=P_{13}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+P_{23}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+P_{33}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}$$

Resolver 1

$$\begin{cases} P_{11}+P_{21}+0=0 \\ P_{11} \quad +P_{31}=1 \\ P_{21}+P_{31}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{11}=-1/2 \\ P_{21}=1/2 \\ P_{31}=3/2 \end{cases}$$

Resolver 2

$$\begin{cases} P_{12}+P_{22}+0 \;=1 \\ P_{12} \quad +P_{32}=2 \\ P_{22}+P_{32}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{12}=1 \\ P_{22}=0 \\ P_{32}=1 \end{cases}$$

Resolver 3

$$\begin{cases} P_{13}+P_{23}+0 \;=1 \\ P_{13} \quad +P_{33}=1 \\ P_{23}+P_{33}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{13}=1/2 \\ P_{23}=1/2 \\ P_{33}=1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 es: $P=\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

ii) Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del vector $X \in IR^3$ en la base B_1, entonces el vector X es:

$$X=1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deseamos hallar las coordenadas de X en la base B_2. Para ello debemos expresar X como combinación lineal de los vectores de la base B_2.

$$X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ \alpha_1 + \quad +\alpha_3 = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (II) \\ \alpha_2+\alpha_3=2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (III) \end{cases}$$

II − III: $\alpha_1-\alpha_2=0$ .... (IV)

IV con I: $\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases}$

$$\alpha_1=0$$
$$\alpha_2=0$$

De II $\quad \alpha_3=2$

Luego las coordenadas de X en la base B_2 son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que se denota por $[X]_{B_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

. También podemos hallar con la fórmula siguiente:

$[X]_{B_2}=P[X]_{B_1}$ donde: P es una matriz de tránsito de B_1 a B_2. Es decir $B_1 \xrightarrow{P} B_2$

$$=\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ donde } [X]_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{son las coordenadas de } X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en la base } B_1$$

Ejemplo 11 Sean las bases $B=\{u_1, u_2, u_3\}$ y $B'=\{v_1, v_2, v_3\}$ de IR^3 donde

$$u_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad u_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_1=\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y \quad v_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz de transacción de B a B'.

b) Calcule las coordenadas de $W=\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ en la base B.

c) Calculando $[W]_{B'}$ se lee: *"las coordenadas de W en la base B'"*

Solución:

a) La matriz de transacción de B a B' se halla expresando cada vector u_i de B como combinación lineal de los vectores de B'.

Así:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} = P_{11}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{21}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{31}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = P_{12}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{22}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{32}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix} = P_{13}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} + P_{23}\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix} + P_{33}\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix} \end{cases}$$

Al resolver cada sistema de ecuaciones obtendremos:

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

b) Las coordenadas de $W = \begin{pmatrix}-5\\8\\-5\end{pmatrix}$ en la base B, se halla expresando el vector W como combinación lineal de los vectores de B.

Así:

$$\begin{pmatrix}-5\\8\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5 = -3\alpha - 3\beta + \gamma \\ 8 = \quad 2\beta + 6\gamma \\ -5 = -3\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

Al resolver, obtendremos: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

En consecuencia la matriz de coordenadas de W en la base B que se denota por $[W]_B$ es:

$$[W]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

c) $$[W]_{B'} = P[W]_B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19/12\\-43/12\\4/3\end{bmatrix}$$

Ejemplo 12 Considere las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$ de $I\!R^2$, donde:

$$u_1 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz de transición de B a B'.

b) Calcule la matriz de coordenadas $[W]_B$ donde $W = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

c) Hallar las coordenadas de W en la base B'

d) Encuentre la matriz de transición de B' a B.

e) Calcular $[W]_{B'}$ aplicando el Teorema.

Solución:

Haciendo un diagrama de flechas tenemos:

$$B \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} B'$$

a) Se pide hallar P:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = P_{11}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + P_{21}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = P_{12}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + P_{22}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 = P_{11} - P_{21} \\ 2 = 3p_{11} - p_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = 0 \\ p_{21} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = P_{12} - P_{22} \\ -1 = 3p_{12} - p_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = -5/2 \\ p_{22} = -13/2 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix}$$

b) Se pide hallar las coordenadas de W en la base B: $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha + 4\beta \\ -5 = 2\alpha - \beta \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha = -17/10 \\ \beta = 8/5 \end{cases}$$

Por tanto: $[W]_B = \begin{pmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de W en la base B.

c) Las coordenadas de W en la base B', denotado por $[W]_{B'}$ se halla resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = a - b \\ -5 = 3a - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \end{cases}$$

Por tanto: $[W]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

d) Se pide hallar la matriz P^{-1} donde $B' \xrightarrow{P^{-1}} B$

Veamos:

Expresar cada vector de B' como combinación lineal de los vectores de B.

Así:
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = q_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q_{21}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = q_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q_{22}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

De (1) $\begin{cases} 1 = 2q_{11} + 4q_{21} \\ 3 = 2q_{11} - q_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{11} = 13/10 \\ q_{21} = -2/5 \end{cases}$

De (2) $\begin{cases} -1 = q_{12} + 4q_{22} \\ -1 = 2q_{12} - q_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{12} = -5/9 \\ q_{22} = -1/9 \end{cases}$

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 13/10 & -5/9 \\ -2/5 & -1/9 \end{bmatrix}$$

e) $[W]_{B'} = P[W]_B$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS. Grupo 01

1. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base $S = \{e^t, e^{-t}\}$. Hallar la representación del operador lineal $L : V \longrightarrow V$ definido por $L(f) = f'$ respecto a S.

2. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base ordenada
$$S = \{sen\, t, \cos t\}$$
Hallar la representación del operador lineal $L : V \longrightarrow V$ definido por $(f) = f'$ respecto a S.

3. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas con base ordenada $S = \{sen\, t, \cos t\}$ y considerar $R = \{sen\, t - \cos t, sen\, t + \cos t\}$, otra base ordenada para V. Hallar la representación del operador lineal $T : V \longrightarrow V$ definido por $T(f) = f'$ respecto a:

   (a) S (b) R (c) S y R (d) R y S

4. Sea V el espacio vectorial con base $S = \{1, t, e^t, te^t\}$ y sea $L : V \longrightarrow V$ un operador lineal definido por $L(f) = f' = \frac{df}{dt}$. Hallar la representación de L respecto a S

5. Sea $L : P_1 \longrightarrow P_2$ definida por $L(p(t)) = tp(t) + p(0)$. Considerar las bases coordenadas $S = \{t, 1\}$ y $S' = \{t+1, t-1\}$ para P_1 y $T = \{t^2, t, 1\}$ y

   $T' = \{t^2 + 1, t-1, t+1\}$ para P_2. Hallar la representación de L respecto a:

   a) S y T

   b) S' y T'

   c) hallar $L(-3t + 3)$ a partir de la definición de L y de las matrices obtenidas en (a) y (b).

6. Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ y sea $L: I\!R^{2\times 2} \longrightarrow I\!R^{2\times 2}$ la transformación lineal definida por:

$L(X) = AX - XA$ para X en $I\!R^{2\times 2}$. Sean S y T las bases ordenadas para $I\!R^{2\times 2}$ definidas por:

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$T=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

Hallar la representación de L respecto a:

a) S b) T c) S y T d) T y S.

7. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ la transformación lineal cuya representación es $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ respecto a las bases ordenadas:

$B=\{(1,0,-1),(0,2,0),(1,2,3)\}$ y $B'=\{(1,-1),(2,0)\}$

Hallar la representación de T respecto a las bases naturales para $I\!R^3$ y $I\!R^2$.

Respuesta:

2. $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix}13/2 & 1/2 & -3/2\\ -5/2 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6. a) $\begin{bmatrix}0 & -3 & 2 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0 & 3 & -2 & 3\\ 0 & -9 & -2 & -6\\ 0 & 3 & 6 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0 & 3 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 1 & -3\\ 1 & 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}0 & -3 & 2 & -3\\ 0 & -5 & -2 & -3\\ 0 & 3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 3\end{bmatrix}$

8. FUNCIONALES LINEALES.

Definición: Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!K$, una transformación lineal f de V en el cuerpo de escalares $I\!K$ se llama un ***funcional lineal*** sobre V.

Notación.- Sea V un espacio vectorial y $I\!K$ el cuerpo de escalares, la aplicación.

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow I\!K\\ v &\longmapsto f(u)\end{aligned}$$

es un funcional lineal sobre V, si para todos los vectores $\mu, v \in V$ y todo escalar $\alpha \in I\!K$, se cumple $f(\alpha\mu + v) = \alpha f(\mu) + f(v)$.

EJEMPLO 1 Sea $I\!K^n = \{(x_1,\ldots,x_n)/x_i \in I\!K\}$ y sean $a_1,\ldots,a_n$ escalares pertenecientes a $I\!K$. Defínase una función f en $I\!K^n$ por:

$$\begin{aligned} f: I\!K^n &\longrightarrow I\!K\\ (x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1+\ldots+a_nx_n\\ &\qquad = [a_1 \ldots a_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Entonces f es un funcional lineal sobre $I\!K^n$ representado por la matriz $[a_1 \ldots a_n]$ respecto a la base ordenada canónica de $I\!K^n$ y la base $\{1\}$ de $I\!K$.

La base canónica de $I\!K^n$ es $\beta = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ donde $\varepsilon_1 = (1,\ldots,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots,\varepsilon_n = (0,\ldots,1)$, entonces por definición de f, tenemos:

$$\boxed{f(\varepsilon_j) = a_j \quad , \quad j = 1,\ldots,n} \text{ — } (*)$$

Aplicando (*) probar que $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1+\ldots+a_nx_n$

Veamos:

Si en el vector $(x_1,\ldots,x_n) = x_1\varepsilon_1+\ldots+x_n\varepsilon_n$

$$= \sum_{j=1} x_j\,\varepsilon_j$$

Aplicamos f: $f(x_1,\ldots,x_n) = f\left(\sum x_j\,\varepsilon_j\right)$

como f es lineal: $= \sum x_j\, f(\varepsilon_j)$

Pero $f(\varepsilon_j) = a_j$ $= \sum x_j\, a_j$

$$= \sum a_j\, x_j$$

EJEMPLO 2 Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado de la recta real y sea $C([a,b])=\{f:[a,b]\longrightarrow I\!R \,/\, f \text{ es continua sobre } [a,b]\}$ el espacio de las funciones reales continuas sobre $[a,b]$. Entonces.

$$L: C[a,b] \longrightarrow I\!R$$
$$f \longmapsto L(f)=\int_a^b f(t)\,dt$$

define un ***funcional lineal L*** en $C([a,b])$.

8.1 El espacio **dual.**

Sea V un espacio vectorial y $I\!K$ el cuerpo de escalares, el conjunto

$$V^* = L(V, I\!K)=\{f: V \to I\!K \,/\, f \text{ es un funcional lineal}\}$$

de todos los funcionales lineales sobre V se llama **espacio dual de** V.

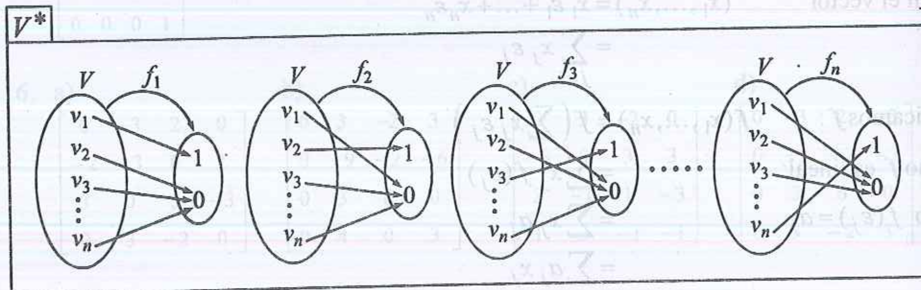
8.1.1. **V^* es un espacio vectorial.**

- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, y sea $I\!K$ un espacio vectorial de dimensión finita 1. Por el teorema 2. deducimos que el **espacio dual** V^* es de dimensión finita y tiene dimensión $1\times n = n$.

  Es decir $\dim V^* = \dim V$.

8.1.2. Sea $\beta=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Conforme al teorema ... existe, para cada i, un funcional lineal único $f_i:\beta \longrightarrow \{0,1\}$, tal que:

① $\boxed{f_i(v_j)=\delta_{ij}}$, donde $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$



De esta manera, a partir de la base β y con la definición ① dada para cada funcional f_i, hemos obtenido n funcionales distintos $f_1,\ldots,f_n$ sobre V.

8.1.3 Probar que $f_1,\ldots,f_n$ son linealmente independientes.

Veamos:

Por demostrar que: $c_1f_1+\ldots+c_nf_n=0$ implica $c_1=\ldots=c_n=0$. Para ello, elegimos un funcional $f\in V^*$, tal que.

$$f=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

Evaluar en cada v_j: $\quad f(v_j)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j)$

Pero $f_i(v_j)=\delta_{ij}$, entonces $\quad f(v_j)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\delta_{ij}$

Como $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ entonces $\boxed{f(v_j)=c_j}$ —②

La igualdad en ② se cumple para todo funcional $f\in V^*$, en particular se cumplirá para el funcional lineal NULA $f(v_j)=0$, para cada j, y en consecuencia se tendrá:

$\boxed{c_j=0}$, para todo j

Este resultado prueba que $f_1,\ldots,f_n$ son linealmente independientes.

8.1.4 Si $f_1,\ldots,f_n$ son linealmente independientes y la $\dim V^*=n$, afirmamos que $\beta^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ es una base de V^*. Esta base se llama **base dual** de V^*.

EJEMPLO 3 Considérese $\beta=\{u_1,u_2\}$ una base de $I\!R^2$ donde $u_1=(1,2)$, $u_2=(1,3)$. Hallar la base dual $\{\phi_1,\phi_2\}$.

Solución:

- Por definición de funcional lineal y por el ejemplo 1, tenemos:

$$f: I\!R^2 \longrightarrow I\!R$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)=a_1x+a_2y$$

De manera similar, los funcionales lineales ϕ_1 y ϕ_2 son, respectivamente,

$$\phi_1(x,y)=ax+by \quad .... \text{(I)}$$

$$\phi_2(x,y)=cx+dy \quad .... \text{(II)}$$

- Porque $\beta=\{u_1,u_2\}$ es una base de $I\!R^2$ definimos:

$$\begin{cases}\phi_1(u_1)=1\\ \phi_1(u_2)=0\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}\phi_2(u_1)=0\\ \phi_2(u_2)=1\end{cases}$$

$\Downarrow$ **Reemplazar en (I)** $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ **Reemplazar en (II)**

$$\begin{cases}\phi_1(1,2)=a+2b=1\\ \phi_1(1,3)=a+3b=0\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}\phi_2(1,2)=c+2d=0\\ \phi_2(1,3)=c+3d=1\end{cases}$$

Resolver: $\qquad\qquad$ **Resolver:**

$$\begin{cases}a+2b=1\\ a+3b=0\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}c+2d=0\\ c+3d=1\end{cases}$$

$$b=-1 \qquad\qquad d=1$$

$$a=3 \qquad\qquad c=-2$$

o $w_1=(a,b)=(3,-1)$ $\qquad\qquad$ o $w_2=(c,d)=(-2,1)$

Por tanto, la base dual está formada por las funcionales $\phi_1(x,y)=3x-y$, $\phi_2(x,y)=-2x+y$.

Esto es $\quad \beta^*=\{\phi_1,\phi_2\}$

o $\quad \beta^*=\{\underbrace{(3,-1)}_{w_1},\underbrace{(-2,1)}_{w_2}\}$

EJEMPLO 4 Sea $\quad V=\left\{\, p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \,/\, \begin{array}{l}p \text{ es un polinomio de}\\ \text{grado menor o igual que 2.}\end{array}\right\}$

Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintos arbitrarios.

Definimos $L_i(p)=p(t_i)$, $i=1,2,3$. donde $p\in V$.

a) Probar que las funcionales L_1, L_2 y L_3 sobre V son linealmente independientes y forman una base de V^*.

b) ¿Cuál es la base de V de la que ésta es la dual?. Tal base $\{P_1,P_2,P_3\}$, de V debe satisfacer $L_i(p_j)=\delta_{ij}$ o $p_j(t_i)=\delta_{ij}$.

Solución:

a) Debo probar: $c_iL_1+c_2L_2+c_3L_3=0$ implica $c_1=c_2=c_3=0$.

Veamos:

Supongamos que: $\boxed{L=c_1L_1+c_2L_2+c_3L_3}$ —(a.1)

Usando la base $\{\underbrace{1}_{P_1},\underbrace{x}_{P_2},\underbrace{x^2}_{P_3}\}$ de V y definiendo cada funcional L_i tenemos:

$L_1:V\longrightarrow I\!R$	$L_2:V\longrightarrow I\!R$	$L_3:V\longrightarrow I\!R$
$P\longmapsto L_1(P)=P(t_1)$	$P\longmapsto L_2(P)=P(t_2)$	$P\longmapsto L_3(P)=P(t_3)$
$p_1(x)=1\longmapsto L_1(P_1)=P_1(t_1)=1$	$P_1(x)=1\longmapsto L_2(P_1)=P_1(t_2)=1$	$P_1(x)=1\longmapsto L_3(P_1)=P_1(t_3)=1$
$p_2(x)=x\longmapsto L_1(P_2)=P_2(t_1)=t_1$	$P_2(x)=x\longmapsto L_2(P_2)=P_2(t_2)=t_2$	$P_2(x)=x\longmapsto L_3(P_2)=P_2(t_3)=t_3$
$p_3(x)=x^2\longmapsto L_1(P_3)=P_3(t_1)=t_1^2$	$P_3(x)=x^2\longmapsto L_2(P_3)=P_3(t_2)=t_2^2$	$P_3(x)=x^2\longmapsto L_3(P_3)=P_3(t_3)=t_3^2$

Si en a.1 suponemos que $L(P)=0$ para todo $P\in V$, entonces aplicando L a cada función de la base $\{1,x,x^2\}$ en particular, obtenemos:

1) $L(P_1)=c_1\underbrace{L_1(P_1)}_{1}+c_2\underbrace{L_2(P_1)}_{1}+c_3\underbrace{L_3(P_1)}_{1}$

$$0=c_1+c_2+c_3$$

2) $L(P_2)=c_1\underbrace{L_1(P_2)}_{t_1}+c_2\underbrace{L_2(P_2)}_{t_2}+c_3\underbrace{L_3(P_2)}_{t_3}$

$$0=t_1c_1+t_2c_2+t_3c_3$$

3) $L(P_3)=c_1\underbrace{L_1(P_3)}_{t_1^2}+c_2\underbrace{L_2(P_3)}_{t_2^2}+c_3\underbrace{L_3(P_3)}_{t_3^2}$

$$0=t_1^2c_1+t_2^2c_2+c_3t_3^2$$

Así hemos obtenido un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas: c_1, c_2 y c_3.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$
$$t_1 c_1 + t_2 c_2 + t_3 c_3 = 0$$
$$t_1^2 c_1 + t_2^2 c_2 + t_3^2 c_2 = 0$$

Porque t_1, t_2, t_3 son números reales diferentes, entonces el determinante del sistema es diferente de cero, por lo tanto $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Conclusión: L_1, L_2, L_3 son linealmente independientes y como V tiene dimensión 3, entonces el conjunto $\{L_1, L_2, L_3\}$ es una base de V^*.

b) De $P_j(t_1) = \delta_{ij}$ obtenemos:

$P_j(t_i) = \delta_{ij}$:

- $P_1(t_i) = \delta_{i1}$:
  - $P_1(t_1) = \delta_{11} = 1 \longrightarrow P_1(t_1) = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}$
  - $P_1(t_2) = \delta_{21} = 0$
  - $P_1(t_3) = \delta_{31} = 0$
  - $\Rightarrow P_1(x) = \frac{(x - t_2)(x - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}$
- $P_2(t_i) = \delta_{i2}$:
  - $P_2(t_1) = \delta_{12} = 0$
  - $P_2(t_2) = \delta_{22} = 1 \longrightarrow P_2(t_2) = \frac{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}$
  - $P_2(t_3) = \delta_{32} = 0$
  - $\Rightarrow P_2(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}$
- $P_3(t_1) = \delta_{i3}$:
  - $P_3(t_1) = \delta_{13} = 0$
  - $P_3(t_2) = \delta_{23} = 0$
  - $\Rightarrow P_3(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$
  - $P_3(t_3) = \delta_{33} = 1 \longrightarrow P_3(t_3) = \frac{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$

Así hemos obtenido: $P_1(x) = \frac{(x - t_2)(x - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}$, $P_2(x) = \frac{(x - t_1)(x - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}$, $P_3(t) = \frac{(x - t_1)(x - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$

De esta manera afirmamos que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V. Cada polinomio $P \in V$, se puede expresar como: $P = P(t_1)P_1 + P(t_2)P_2 + P(t_3)P_3$

TEOREMA 20 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ y sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una única base dual $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de V^*, tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Para cada funcional lineal f sobre V se tiene: $\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\, f_i}$ —(I)

y para cada vector v de V se tiene: $\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\, v_i}$ —(II)

Demostración:

1. En 8.1.2 hemos probado la existencia de la base dual $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de V^*, tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, donde $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

2. Si $f \in V^*$, entonces f es una combinación lineal de los f_i, esto es $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ ... (2*)

   Al evaluar en cada v_j, obtenemos: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j)$, $j = 1, 2, \ldots n$

   $$= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij}$$
   $$= c_j$$

   Entonces (2*) es: $\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} f(v_j)\, f_i}$

3. Si elegimos un vector $v \in V$ y como $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces v es una combinación lineal de los v_i, esto es:

   $$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3^*)$$

4. Aplicar cada f_j de β^* al vector v, obtenemos:

   $$f_j(v) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)$$

5. Como f_j es lineal, entonces $f_j(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(v_i)$

6. Pero $f_j(v_i)=\delta_{ij}$, $f_j(v)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\delta_{ij}$

$f_j(v)=x_j$

7. Reemplazar en (3*): $v=\sum_{i=1}^{n} f_i(v)v_i$ ∎

Nota: Si elegimos el espacio euclideano $V=I\!R^n=\{(x_i,\dots,x_n)/x_i\in I\!R\}$ donde $\beta=\{e_1,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $I\!R^n$ y $\beta^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ es la base dual de $(I\!R^n)^*$, entonces deducimos:

a) $f_i(x_1,\dots,x_n)=x_i$

f_i es la función que asigna a cada vector $(x_1,\dots,x_n)$ la *i*-ésima coordenada de $(x_1,\dots,x_n)$ respecto a la base ordenada β.

Las f_i se llaman funciones coordenadas de β.

b) La fórmula (I), cuando se combina con (II), dice que si $f\in(I\!R^3)^*$ y si $f(e_i)=a_i$, entonces la igualdad.

$(x_1,\dots,x_n)=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

implica $f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$

ANULADORES (o ANIQUILADORES)

Definición: Si *V* es un espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!K$ y *S* es un subconjunto (no necesariamente un subespacio) de *V*, el ***anulador*** de *S* es el conjunto $S°$ de funcionales lineales *f* sobre *V* tales que $f(v)=0$ para todo $v\in S$.

Esto es, $S°=\{f:V\longrightarrow I\!R\,/\,f(v)=0,\ \forall\,v\in S\}$

$S°$: anulador de *S*

Ejemplo 01 Sea $S=gen\{\underbrace{(1,2,-3,4)}_{v_1},\underbrace{(0,1,4,-1)}_{v_2}\}$ un subespacio de $I\!R^4$, generado por v_1 y v_2. Encontrar una base de $S°$.

Solución:

Los funcionales lineales *f* de $I\!R^4$ en $I\!R$ tienen la forma $f(x,y,z,w)=ax+by+cz+dw$.

Los elementos de $S°$ (anulador de *S*) son los funcionales $f:I\!R^4\longrightarrow I\!R$ tales que $f(v_i)=0\,;\ i=1,2$.

$$f(x,y,z,w)=ax+by+cz+dw$$

$\underbrace{f(1,2,-3,4)}_{a+2b-3c+4d}=0$ $\underbrace{f(0,1,4,-1)}_{b+4c-d}=0$

$a+2b-3c+4d=0$ $b+4c-d=0$

Así hemos obtenido, un sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} a+2b-3c+4d&=0\\ b+4c-d&=0\end{aligned}$$

Resolver el sistema matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)\ (-2)$$

$$(*)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2

Nº de incógnitas = 4

Como: Nº de incógnitas − rango = 2, afirmamos que habran 2 parámetros.

Podemos elegir como parámetros *c* y *d*. Así obtendremos de (*):

$$a=11c-6d$$

$$b=-4c+d$$

Entonces los elementos de S^o tienen la forma:

$$f(x,y,z,w)=(11c-6d)x+(-4c+d)y+cz+dw$$

- A continuación, hallemos una base de S^o.

Como la $\dim S=2$ y $\dim I\!R^4=4$, mediante la relación: $\dim S+\dim S^o=\dim I\!R^4$

$2+\dim S^o=4$,

obtenemos $\dim S^o=2$. Una base de S^o se obtiene, dando valores arbitrarios a los parámetros c y d:

- Para $c=1$ y $d=0$, obtenemos $f_1(x,y,z,w)=11x-4y+z$
- Para $c=0$ y $d=-1$, obtenemos $f_2(x,y,z,w)=6x-y-z$

El conjunto de funcionales lineales $\{f_1, f_2\}$ es una base de S^o.

Ejemplo 02 Sea $M=gen\{f_1, f_2, f_3\}$ un subespacio vectorial de $(I\!R^4)^*$ generado por las funcionales: $f_1(x,y,z,w)=x+y+2z-5w$

$f_2(x,y,z,w)=2x+5y-z-9w$

$f_3(x,y,z,w)=2x+y-z+3w$

Hallar el subespacio que anulen a las funcionales f_1, f_2, f_3.

Solución:

a) Resolver $\begin{cases} f_1=0 \\ f_2=0 \\ f_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z-5w=0 \\ 2x+5y-z-9w=0 \\ 2x+y-z+3w=0 \end{cases}$

$\Downarrow$

Por el método de Gauss-Jordan reducir la matriz A de los coeficientes a una matriz canónica.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- De la matriz R obtenemos la funcionales lineales: $g_1(x)=x+2w$, $g_2(x)=y-3w$, $g_3(x)=z-2w$

que generan el mismo subespacio M de $(I\!R^4)^*$.

- El subespacio anulador, se obtiene haciendo el siguiente análisis; N° de incógnitas = 4, rango de A = rango de la matriz ampliada = 3; N° de parámetros = 4 − 3 = 1. Haciendo $w=a$, de la matriz R obtenemos: $x=-2a$, $y=3a$, $z=2a$, $w=a$.

El subespacio anulado consta de los vectores $(-2a, 3a, 2a, a)$, $a\in I\!R$.

PROPIEDADES DEL ANULADOR:

1) S^o es un subespacio de V^* para cualquier subconjunto S de V.
2) Si $S=\{0\}$, entonces $S^o=V$ .... $(\{0\}^o=V)$
3) Si $S=V$, entonces $S^o=\{\theta\}$, $\theta\in V^*$.......... $(V^o=\{\theta\})$ — Subespacio cero de V^*.
4) Si $S-\{0\}\neq\phi$, entonces $S^o\neq V^o$
5) Si $S\subset R\subset V$, entonces $S^o\supset R^o$.

Ejemplo 03 Sea $W=gen\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ el subespacio de $I\!R^5$ generado por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4; donde $v_1=(1,2,0,-3,1)$, $v_2=(1,2,1,-3,1)$, $v_3=(1,2,0,-3,2)$, $v_3=(3,6,1,-9,4)$.

Hallar W^o, anulador de W.

Solución:

Los elementos de W^o son los funcionales de $I\!R^5$ en $I\!R$, definido por:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5$ tales que $f(v_i)=0$, $i=1,2,3,4$.

De $f(v_i)=0$ se obtienen 4 ecuaciones lineales homogéneas con incógnitas a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

La matriz de los coeficientes de estas 4 ecuaciones es A.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&-3&1\\1&2&1&-3&1\\1&2&0&-3&2\\3&6&1&-9&4\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&2&0&-3&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Por Gauss-Jordan la matriz A se reduce a la matriz R.

El rango de $A=3$. Como hay $n=5$ incógnitas, entonces habrán $5-3=2$ parámetros. De la matriz R obtenemos.

$$\begin{cases}a_1+2a_2-3a_4=0\\a_3=0\\a_5=0\end{cases}$$

Haciendo $a_5=a$, $a_4=b$, obtenemos: $\begin{cases}a_1=-2a+3b\\a_2=a\\a_3=0\\a_4=b\\a_5=0\end{cases}$

Entonces los elementos de $W°$ son las funcionales de la forma:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-2a+3b)x_1+ax_2+bx_4\ ;\ a\in I\!R\ ,\ b\in I\!R$$

- $\dim W=3$, $\dim I\!R^5=5$; entonces $\dim W°=2$
- Una base de $W°$ se obtiene, si:

  i) $a=1$, $b=0 \Rightarrow f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=-2x_1+x_2$

  ii) $a=1$, $b=1 \Rightarrow f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=3x_1+x_4$
- Luego: $\{f_1,f_2\}$ es una base de $W°$.

TEOREMA 21 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ y sea W un subespacio de V. Entonces $\dim W+\dim W°=\dim V$.

Demostración:

Suponiendo que $\dim W=K$ y $\dim V=n$, vamos a demostrar que $\dim W°=n-I'$

Veamos:

1. Sea $k=\dim W$ y $\{w_1,\dots,w_k\}$ una base de W. Se eligen vectores $v_1,\dots,v_{n-k}$ de modo que $\{w_1,\dots,w_k,v_1,\dots,v_{n-k}\}$ sea una base de V.
2. Sea $\{f_1,\dots,f_k,\underbrace{\phi_1,\dots,\phi_{n-k}}\}$ la base de V^* que es dual de la base de V.
3. Probemos que $\{\phi_1,\dots,\phi_{n-k}\}$ es una base del anulador $W°$:
   a) Al ser $\{\phi_1,\dots,\phi_{n-k}\}$ parte de una base V^*, es linealmente independiente.
   b) Probar que $\{\phi_i\}$ genera $W°$:
   Sea $f\in W°$, entonces por el teorema 1:
   $$f=\underbrace{f(w_1)}_{0}f_1+\dots+\underbrace{f(w_k)}_{0}f_k+f(v_1)\phi_1+\dots+f(v_{n-k})\phi_{n-k}$$
   $$=f(v_1)\phi_1+\dots+f(v_{n-k})\phi_{n-k}.$$
4. En consecuencia $\{\phi_1,\dots,\phi_{n-k}\}$ genera $W°$ y por tanto es una base de $W°$.
5. Entonces $\dim W°=n-k=\dim V-\dim W$. ■

COROLARIO 1 Si W es un subespacio de dimensión k de un espacio vectorial V de dimensión n, entonces W es la intersección de $(n-k)$ hiperespacios en V.

Demostración:

- Si $\dim W=k$, suponer que $\{v_1,\dots,v_k\}$ es una base de W.
- Si $\dim V=n$, elegir los vectores $v_{k+1},\dots,v_n$ en V, de modo que $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ sea una base para V.
- W es el conjunto de vectores v tales que $f_i(v)=0$, $i=k+1,\dots,n$.

♦ En caso de que $k=n-1$, W es el espacio nulo de f_n.

COROLARIO 2 Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $W_1 = W_2$, si y sólo si, $W_1^\circ = W_2^\circ$.

Demostración:

♦ Si $W_1 = W_2$, entonces $W_1^\circ = W_2^\circ$.

♦ Si $W_1 \neq W_2$, entonces uno de los dos subespacios contiene un vector que no está en el otro. Supongamos que existe un vector v tal que $v \in W_2$ y $v \notin W_1$. Por el corolario 1, existe un funcional lineal f tal que $f(v)=0 \ \forall v \in W_1$, pero $f(v) \neq 0$. Entonces $f \in W_1^\circ$, pero $f \notin W_2^\circ$ y $W_1^\circ \neq W_2^\circ$

∴ ■

Ejemplo 04 Sea V el espacio vectorial de todas las funcionales polinomios p de $I\!R$ en $I\!R$ que tienen grado 2 o menor:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Se definen tres funciones lineales sobre V por:

$$f_1(P) = \int_0^1 p(x)\,dx \quad , \quad f_2(P) = \int_0^2 p(x)\,dx \quad , \quad f_2(P) = \int_0^{-1} p(x)\,dx$$

Demostrar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de V^*, presentando la base de V de la cual ésta es dual.

Solución:

Se tiene $V = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 : c_0, c_1, c_2 \in I\!R\}$

Se han definido las funciones:

$$f_1 : V \longrightarrow I\!R \quad , \quad f_2 : V \longrightarrow I\!R \quad , \quad f_3 : V \longrightarrow I\!R$$

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx$$

Las funciones f_1, f_2, f_3 pertenecen al espacio dual V^*

Encontrar la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de V que es el dual a $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Sean $v_1 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, debemos hallar: c_0, c_1, c_2

$v_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, debemos hallar: a_0, a_1, a_2

$v_3 = b_0 + b_1 x + b_2 x$, debemos hallar: b_0, b_1, b_2

Por definición de la base dual, se tiene:

$$f_1(v_1) = 1 \qquad f_1(v_2) = 0 \qquad f_1(v_3) = 0$$
$$f_2(v_1) = 0 \qquad f_2(v_2) = 1 \qquad f_2(v_3) = 0$$
$$f_3(v_1) = 0 \qquad f_3(v_2) = 0 \qquad f_3(v_3) = 1$$

$$\begin{cases} \int_0^1 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\,dx = 1 \\ \int_0^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\,dx = 0 \\ \int_0^{-1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\,dx = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 0 \\ \int_0^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 1 \\ \int_0^{-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \int_0^1 (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 0 \\ \int_0^2 (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 0 \\ \int_0^{-1} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 1 \end{cases}$$

Integrar y resolver cada sistema:

$$c_0 = 1 \qquad a_0 = -\tfrac{1}{6} \qquad b_0 = -\tfrac{1}{3}$$
$$c_1 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad b_1 = 1$$
$$c_2 = -\tfrac{3}{2} \qquad a_2 = \tfrac{1}{2} \qquad b_2 = -\tfrac{1}{2}$$

Entonces: $\left\{1 + x - \tfrac{3}{2}x^2 \ , -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}x^2 \ , -\tfrac{1}{3} + x - \tfrac{1}{2}x^2\right\}$ **es la base de V que es dual a** $\{f_1, f_2, f_3\}$.

De esto deducimos: Toda base de V^* es la dual de alguna base de V.

EJERCICIOS

01. Considere la base de $\mathbb{R}^3 : \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (1,-1,3)$, $u_2 = (0,1,-1)$, $u_3 = (0,3,-2)$. Hallar la base dual $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Respuesta: $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = 7x - 2y - 3z$, $f_3(x,y,z) = -2x + y + z$.

02. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 1: $P(x) = a + bx$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, se definen dos funciones lineales sobre V por:

$$f_1(P) = \int_0^1 P(x)\,dx \quad \text{y} \quad f_2(P) = \int_0^2 P(x)\,dx$$

Encontrar la base $\{u_1, u_2\}$ de V que es dual a $\{f_1, f_2\}$.

Respuesta: $\{2 - 2x, -\frac{1}{2} + x\}$ es la base de V que es dual a $\{f_1, f_2\}$.

03. Probar que:
a) Para todo subconjunto S de V, $S \subseteq S^{\circ\circ}$,
b) Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2^{\circ} \subseteq S_1^{\circ}$.

04. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{K}$. Para $a \in \mathbb{K}$, defínase $\phi_a : V \longrightarrow \mathbb{K}$ según $\phi_a(f(t)) = f(a)$. Probar que:
a) ϕ_a es lineal,
b) Si $a \neq b$, necesariamente $\phi_a \neq \phi_b$.

Respuesta b) Sea $f(t) = t$. Entonces $\phi_a(f(t)) = a \neq b = \phi_b(f(t))$ y por tanto $\phi_a \neq \phi_b$.

05. Sean $v_1 = (1,0,-1,2)$ y $v_2 = (2,3,1,1)$ y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por v_1 y v_2. ¿Qué funcionales lineales f: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?

06. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.
a) Demostrar que $(W_1 + W_2)^{\circ} = W_1^{\circ} \cap W_2^{\circ}$
b) Demostrar que $(W_1 \cap W_2)^{\circ} = W_1^{\circ} + W_2^{\circ}$.

07. Supóngase que $f, g \in V^*$ y que $f(v) = 0$ implica $g(v) = 0$ para todos los $v \in V$. Mostrar que $g = kf$ para algún escalar k.

08. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean $f_1, f_2 \in V^*$ y supóngase que $\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(v) = f_1(v)\, f_2(v)$ también pertenece a V^*. Mostrar que $f_1 = 0 \vee f_2 = 0$

09. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad v_2 = e_2 + 3e_3 + 3e_4 + e_5$$
$$v_3 = e_1 + 4e_2 + 6e_3 + 4e_4 + e_5$$

Hallar una base de W°.

10. Si V tiene dimensión finita, la aplicación $v \longrightarrow \overline{v}$ es un isomorfismo de V sobre V^{**}.

9. EL DOBLE DUAL

9.0 INTRODUCCIÓN

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal, tenemos:

a) $V^* = \{ f : V \longrightarrow \mathbb{K} \,/\, f$ es un funcional lineal$\}$ es el espacio dual de V

b) $V^{**} = \{L : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que Lv es lineal, $v \in V\}$ es el espacio dual de V^*

$$f \longrightarrow L_v(f) = f(v)$$

$$\begin{array}{c} v \in V \\ \downarrow f \\ V^* \xrightarrow{\;L\;} \mathbb{K} \\ f \longrightarrow L_v(f) = f(v) \end{array}$$

¿Cómo se define V^{**}, llamado el **segundo dual** de V?

V^{**} se define del siguiente modo: cada vector $v \in V$ determina un elemento específico Lv sobre V^* definido por

$$Lv(f) = f(v), \text{ para todo } f \in V^*$$

c) Probar que L_v es lineal:

Veamos:

$$\begin{aligned} Lv(\alpha f+g) &= (\alpha f+g)(v) \quad \ldots\ldots\ldots \text{definición de } L_v \\ &= (\alpha f)(v)+g(v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ suma de funciones lineales} \\ &= \alpha f(v)+g(v) \\ &= \alpha Lv(f)+Lv(g) \end{aligned}$$

TEOREMA 22 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Para cada vector $v\in V$ se define

$$L_v(f)=f(v) \quad , \text{ para todo } f\in V^*$$

La aplicación $v\longmapsto L_v$ es un isomorfismo de V sobre V^{**}

Demostración:

Debemos probar: a) La aplicación $v\longmapsto L_v$ es lineal

b) $v\longmapsto L_v$ es no singular

c) $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$

Veamos:

a) Elegir $v=\alpha\mu+w$, con $\alpha\in I\!K$, $\mu\in V$, $w\in V$

Entonces

$$\begin{aligned} L_v(f) &= f(v) \\ &= f(\alpha\mu+w) \\ &= \alpha f(\mu)+f(w) \\ &= \alpha L\mu(f)+Lw(f) \\ L_v &= \alpha L\mu + Lw \end{aligned}$$

b) $L_v=0$ si , y solo si $v=0$. Este resultado implica que $v\longmapsto L_v$ es una transformación lineal no singular de V en V^{**}

c) Por el Teorema 20, se cumple: $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$

Por el Teorema 12, si $\dim V^{**}=\dim V$ y $v\longmapsto L_v$ es una transformación lineal se cumple que esta transformación es inversible.

Por tanto $v\longmapsto L_v$ es un isomorfismo de V sobre V^* ■

OBSERVACIONES:

1. La aplicación $v\longrightarrow L_v$ se conoce como la aplicación natural de V en V^{**}. (v y L_v se identifican) (V y V^* están en mutua dualidad).
2. Si V no es de dimensión finita, entonces la aplicación $v\longmapsto L_v$ nunca es suprayectiva.
3. Si $\{f_i\}$ es la base de V^* dual a $\{v_i\}$ de V, $\{v_i\}$ es la base de $V=V^{**}$ que es dual a $\{f_i\}$.
4. Sea $\beta=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V.

   sea $\beta^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ la base dual (base de V^*).

   Se cumple: $L_{v_i}(f_j)=f_j(v_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1\ ,\ i=j\\ 0\ ,\ i\neq j\end{cases}$

COROLARIO 1 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Si L es un funcional lineal en el espacio dual V^* de V, entonces existe un único vector v de V tal que: $L(f)=f(v)$, para todo $f\in V^*$

COROLARIO 2 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Toda base de V^* es dual de alguna base de V.

Demostración:

1. Sea $\beta^*=\{f_1,\ldots,f_n\}$ una base de V^*. Por el teorema ... existe una base $\{L_1,\ldots,L_n\}$ de V^{**} tal que $L_i(f_j)=\delta_{ij}$.
2. Por el corolario anterior, para todo i existe un vector v_i de V tal que $L_i(f)=f(v_i)$ para todo $f\in V^*$; es decir, tal que $L_i=Lv_i$ .... (2*)
3. La relación (2*) nos conlleva que $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V y que β^* es la dual de esta base. ■

CONSECUENCIAS:

1. Es corriente identificar v con L_v $(v\longmapsto L_v)$ y decir que V "es" el dual de V^*, o que V^* es el dual de V.
2. Si $E\subset V^*$, entonces $E^\circ\subset V^{**}$

3. Si se decide identificar V y V^{**}, entonces $E°$ es un subespacio de V, es decir $E° = \{v \in V : f(v) = 0 \ , \ \forall f \in E\}$.
4. Por el Teorema 3, cada subespacio W está determinado por su anulador $W°$, porque W es el subespacio anulado por todos los $f \in W°$, esto es la intersección de los espacios nulos de todos los f en $W°$.
5. $W = W°°$
6. Cada subespacio W está determinado por su anulador $W°$, porque cada vector $v \in W$ anula a cada funcional $f \in W°$.

Ejemplo: Sea $W = gen\{(1,2,-3,4),(1,3,-2,6),(1,4,-1,8)\}$ un subespacio de $I\!R^4$. Una base de $W°$ es $\{f_1, f_2\}$, donde $f_1(x,y,z,t) = 5x - y + z$, $f_2(x,y,z,t) = 2y - t$.

Aquí, podemos observar que cada vector de W anula a cada funcional de $W°$.

TEOREMA 23 Si S es cualquier subconjunto de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces $(S°)°$ es el subespacio generado por S.

Demostración:

1. Sea $W = gen(S)$
   ↑ W es el subespacio generado por S
2. Por 1 se cumple: $W° = S°$
   Se debe demostrar que $W = W°°$ $\begin{cases} \text{Probar que } \dim W = \dim W°° \\ W \text{ subespacio de } W°° \end{cases}$
3. Por el Teorema 21 se tiene que: $\dim W + \dim W° = \dim V$ cuando W es un subespacio de V y $\dim V < \infty$.
4. Si $W°$ es subespacio de V^*, entonces $\dim W° + \dim W°° = \dim V^*$
   y como $\dim V = \dim V^*$, se tiene en 4. $\dim W° + \dim W°° = \dim V$
5. Igualar 4. con 3. $\quad \dim W + \dim W° = \dim W° + \dim W°°$
   entonces $\quad \dim W = \dim W°°$
6. Como W es un subespacio de $W°°$ y $\dim W = \dim W°°$, entonces $W = W°$

10. TRANSPUESTA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean V y U dos espacio vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$ y una transformación lineal

$$T : V \longrightarrow U$$

T induce una nueva transformación lineal $\quad T^t : U^* \longrightarrow V^*$

$$\phi \longmapsto T^t(\phi)$$

llamado "la transpuesta de T", definido del siguiente modo:

$$T^t(\phi) = \phi \circ T$$

tal que $\quad (T^t(\phi))(v) = \phi(T(v)) \ , \ \forall \phi \in U^* \text{ y } \forall v \in V$

$$V \xrightarrow{T} U \xrightarrow{\phi} I\!K \qquad \phi \in U^*$$

$$\phi \circ T : V \to I\!K \qquad \phi \circ T \in V^*$$

EJEMPLO 1 Dado la transformación lineal $T(x,y) = (2x - y \, , x - 3y)$ y la funcional lineal $\phi(x,y) = 5x - 4y$, hallar $T^t(\phi)$.

Solución:

Se tiene como dato: $\quad I\!R^2 \xrightarrow{T} I\!R^2 \xrightarrow{\phi} I\!R$, $\quad \phi \circ T : I\!R^2 \to I\!R$

Para $\quad v = (x, y)$ se define $\quad (T^t \phi)(x,y) = \phi(T(x,y))$

$$= 5(2x - y) - 4(x - 3y)$$

$$= 6x + 7y$$

EJEMPLO 2 Dado la transformación lineal $T : V_3 \longrightarrow U_2$ definido por $T(x,y,z) = (x - 2y + z \ , \ 2x + y - 3z)$.

a) Hallar la matriz asociada a T en la base canónica.
b) Hallar la transpuesta de T y su matriz asociada.

Solución de a):

$$V_3 \xrightarrow{\quad T \quad} U_2$$

$$\{e_1, e_2, e_3\} \qquad \{\mu_1, \mu_2\}$$

$e_1 = (1,0,0) \qquad \mu_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1,0) \qquad \mu_2 = (0,1)$

$e_3 = (0,0,1)$

$$T(e_1)=(1,2)=a_{11}\mu_1+a_{21}\mu_2 \qquad\qquad (1,2)=\ \ 1\mu_1+2\mu_2$$
$$T(e_2)=(-2,1)=a_{12}\mu_1+a_{22}\mu_2 \ \Rightarrow\ (-2,1)=-2\mu_1+1\mu_2$$
$$T(e_3)=(1,-3)=a_{13}\mu_1+a_{23}\mu_2 \qquad\qquad (1,-3)=\ \ 1\mu_1-3\mu_2$$

La matriz asociada a T en la base canónica ordenada es $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$

Solución de b):

$$U_2^* \xrightarrow{\ T^t\ } V_3^*$$
$$\mathcal{U}^*=\{\phi_1,\phi_2\} \qquad \{f_1,f_2,f_3\}=\mathcal{V}^*$$
$$\phi_1(x,y)=x \qquad f_1(x,y,z)=x$$
$$\phi_2(x,y)=y \qquad f_2(x,y,z)=y$$
$$f_3(x,y,z)=z$$

$\mathcal{U}^*$ base canónica (proyecciones) de U_2^*

$\mathcal{V}^*$ base canónica (proyecciones) de V_3^*

La matriz asociada a T^t se obtiene haciendo:
$$\begin{cases} T^t(\phi_1)=b_{11}f_1+b_{21}f_2+b_{31}f_3\\ T^t(\phi_2)=b_{12}f_1+b_{22}f_2+b_{32}f_3\end{cases}$$

Pero:
$$(T^t(\phi_1))(x,y,z)=\phi_1(T(x,y,z)) = x-2y+z$$
$$(T^t(\phi_2))(x,y,z)=\phi_2(T(x,y,z)) = 2x+y-3z$$

La matriz asociada a T^t es $A^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

La aplicación lineal $T^t: U_2^* \longrightarrow V_3^*$ está definido por: $T^t(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$=(x+2y,-2x+y,x-3y)$$

PROPOSICIÓN: Probar que $T^t: U^* \longrightarrow V^*$ es una transformación lineal
$$\phi \longrightarrow T^t(\phi)=\phi\circ T$$
de U^* en V^*.

Prueba:

Si ϕ_1 y ϕ_2 están en U^* y α es un escalar, tenemos:

$$\begin{aligned}[T^t(\alpha\phi_1+\phi_2)](v) &= [(\alpha\phi_1+\phi_2)\circ T](v)\ ,\quad v\in V\\ &= (\alpha\phi_1+\phi_2)(T(v))\\ &= \alpha\phi_1(T(v)) + \phi_2(T(v))\\ &= \alpha(T^t(\phi_1))(v)+T^t(\phi_2(v))\end{aligned}$$

de modo que $\quad T^t(\alpha\phi_1+\phi) = \alpha T^t(\phi_1) + T^t(\phi_2)$

TEOREMA 24 Sean V y U espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$. Para toda transformación lineal T de V en U, existe una única transformación lineal T^t de U^* en V^* tal que $(T^t(\phi))(v)=\phi(T(v))$, $\forall\ \phi\in U^*$ y $\forall\ v\in V$.

A T^t se le llama **transpuesta** de T. Esta transformación T^t también se llama a menudo adjunta de T.

TEOREMA 25 Sean V y U espacios vectoriales sobre el cuerpo $I\!K$ y sea T una transformación lineal de V en U. El espacio nulo de T^t es el anulador de la imagen de T. Si V y U son de dimensión finita, entonces:

(i) rango (T^t) = rango (T)

(ii) $\underbrace{\text{la imagen de } T^t \text{ es el anulador del espacio nulo de } T}_{\mathrm{Im}(T^t)=(N(T))^o}$.

Demostración:

Las hipótesis son: $(h_1)\ \ T: V\to U$

$(h_2)\ \ N(T^t)=(\mathrm{Im}(T))^o$

$(h_3)\ \ \dim V=n$ y $\dim U=m$; porque V y U son de dimensión finita.

Conceptos que merecen recordarse:

A) rango (T^t) = dim Im (T^t) = r

B) rango(T) = dim Im (T)

C) $N(T^t)$: espacio nulo de T^t o núcleo de T^t. Si $\phi\in N(T^t)\Rightarrow (T^t(\phi))(v)=0$

D) $\mathcal{N}(T^t)$: nulidad de T^t = dim $(N(T^t))$ = dimensión del núcleo de T^t

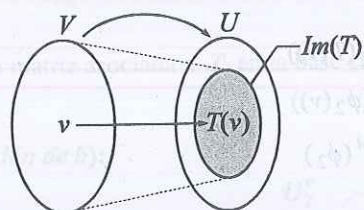
E) $(\mathrm{Im}(T))^o$: anulador de Im(T), Im (T) : imagen de T.

$(\mathrm{Im}(T))^o=\{\phi: \mathrm{Im}(T)\to I\!K \ /\ \phi(T(v))=0\ ,\ \forall\ T(v)\in\mathrm{Im}(T)\ ,\ \forall\ v\in V\}$

F) $\text{Im}(T^t)$: imagen de T^t , $N(T)$: núcleo de T o espacio nulo de T.

$(N(T))^\circ$: anulador de x^2

(i) Por demostrar que: rango (T^t) = rango (T)



$\text{Im}(T)$ es un subespacio de U, entonces

$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T))^\circ = \dim U$

Pasos a seguir:

1. Si $\phi \in U^*$ entonces $(T^t(\phi))(v) = \phi(T(v))$, $\forall\, v \in V$ .... (def. de T^t)
2. Afirmar que $\phi \in N(T^t)$ implica que $(T^t(\phi))(v) = \phi(T(v)) = 0$, $\forall\, v \in V$
3. Visto en (E), por 2. y la hipótesis (h_2) , tenemos que

$$N(T^t) = (\text{Im}(T))^\circ$$

anulador de la imagen de T

espacio nulo de T^t

- Ahora probemos (i):

4. Supongamos que $r = \text{rango}(T) = \dim(\text{Im}(T))$
5. Por el Teorema. 21. se tiene: $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Im}(T))^\circ = \dim U$

$$r \quad + \dim(\text{Im}(T))^\circ = m$$

Entonces $\underbrace{\dim(\text{Im}(T))^\circ}_{N(T^t)} = m - r$ .... (5*)

6. Por 3 y por (5*) obtenemos: $\underbrace{\dim N(T^t)}_{\mathcal{N}(T^t)} = m - r$

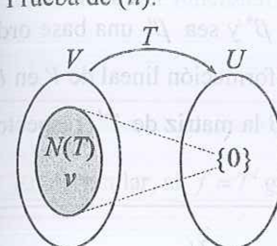
7. Pero $\underbrace{\mathcal{N}(T^t)}_{m-r}$ + rango (T^t) = dim U^* , dim U^* = dim U = m

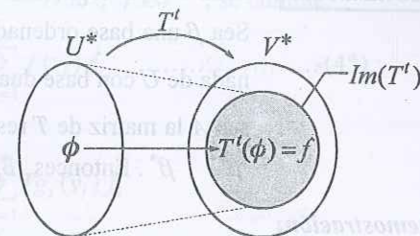
$m - r$ + rango (T^t) = m

rango (T^t) = r

8. Por 7. y 4. obtenemos: $r = \text{rango}(T) = \text{rango}(T^t)$. ■

Prueba de (ii):





$N(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = 0\}$

$(N(T))^\circ = \{\phi : N(T) \longrightarrow I\!K \,/\, \phi(v) = 0\}$

a) $\underbrace{\dim \text{Im}(T^t)}_{\text{rango}\,(T^t)} + \underbrace{\dim N(T^t)}_{\mathcal{N}(T^t)} = \underbrace{\dim U^*}_{\dim U}$

(ii) Por demostrar que $\text{Im}(T^t) = (N(T))^\circ$

1. Sea $N(T)$ el espacio nulo (o núcleo) de T.
2. Por todo funcional $f \in \text{Im}(T^t)$ implica que $f \in (N(T))^\circ$, en efecto, suponer que:

$f = T^t(\phi) \in \text{Im}(T^t)$ para algún $\phi \in U^*$, entonces

Si $v \in N(T)$ se tendrá $f(v) = (T^t\phi)(v) = \phi(T(v))$

$= \phi(0)$

$= 0$

3. Por otro lado, se tiene que la $\text{Im}(T^t)$ es un subespacio del espacio $(N(T))^o$,
4. Por demostrar que: $\dim(N(T))^\circ = \underbrace{\dim \text{Im}(T^t)}_{\text{rango}\,(T^t)}$

Como rango (T^t) = rango Im(T), bastará demostrar que:

$\dim(N(T))^\circ = \underbrace{\dim \text{Im}(T)}_{\text{rango}\,(T)}$

Veamos:

a) Se cumple: $\underbrace{\dim \text{Im}(T)}_{\text{rango}\,(T)} + \dim N(T) = \underbrace{\dim V}_{n} \Rightarrow \dim \text{Im}(T) = n - \dim N(T)$

b) Se cumple: $\dim \text{Im}(T)^\circ + \dim N(T) = \underbrace{\dim V}_{n}$, porque $N(T)$ es subespacio de V.

entonces $\dim N((T))^\circ = n - \dim N(T)$

5. Al igualar los resultados de a) y b), obtenemos: $\dim N((T))^\circ = \dim \text{Im}(T)$
6. Pero $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T^t)$, por lo tanto: $\dim N((T))^\circ = \dim \text{Im}(T^t)$
7. Por 2. y 6. concluimos: $\text{Im}(T^t) = (N(T))^\circ$ ■

TEOREMA 26 Sean V y U espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea β una base ordenada de V con base dual β^* y sea β' una base ordenada de U con base dual β'^*. Sea T una transformación lineal de V en U, sea A la matriz de T respecto a β, β' y sea B la matriz de T^t respecto a β'^*, β^*. Entonces $B_{ij} = A_{ji}$.

Demostración:

1. Sea:

$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\beta' = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$

$\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $\beta'^* = \{g_1, \ldots, g_m\}$

$T: V \longrightarrow U$
$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ $\beta' = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$
$T^t: U^* \longrightarrow V^*$
$\beta'^* = \{g_1, \ldots, g_m\}$ $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$
A es la matriz de T en las bases β y β'
A^t es la matriz de T^t en las bases β'^* y β^*

Las bases de V, de U, de V^* y de U^* respectivamente.

2. Por definición de base y de combinación lineal, se tiene:

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\,\mu_i \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\, f_i \quad , \quad j = 1, \ldots, m$$

Por demostrar que: $T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, f_i$

Veamos:

3. Para T^t se tiene:

$$(T^t g_j)(v_i) = g_j(Tv_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Definición de } T^t$$

$$= g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\mu_k\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Por 2.}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\, g_j(\mu_k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Definición de } g_j$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\delta_{jk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Definición de } \delta_{jk}$$

$$= A_{ji}$$

4. Para cualquier funcional $f: V \longrightarrow K$, $f \in V^*$, se cumple:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\, f_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4^*)$$

5. En particular, si $f = T^t g_i$ tendremos: $T^t g_i = \sum_{i=1}^{n} Tg_i(v_i)\, f_i$

6. Por 3. tenemos: $T^t g_i(v_i) = A_{ji}$

7. Reemplazar 6 en 5. $T^t g_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, f_i$ $\longrightarrow A_{ji} = B_{ij}$

8. En 2. teníamos: $T^t g_i = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\, f_i$

Así queda probado que $B = A^t$

— B es la transpuesta de A.

Definición: Si A es una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, la **transpuesta** de A es la matriz $n \times m$, A^t, definida por $A^t_{ij} = A_{ji}$.

TEOREMA 27 Sea A cualquier matriz $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces el rango de filas de A es igual al rango de columnas.

Demostración:

1. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

2. Sea β la base ordenada canónica de $\mathbb{K}^n$, y
β' la base ordenada canónica de $\mathbb{K}^m$
tal que A es la matriz de T respecto al par β y β'.

3. Sea $T: \underset{\beta}{\mathbb{K}^n} \longrightarrow \underset{\beta'}{\mathbb{K}^m}$ la t.l. de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ tal que la matriz de T respecto al

par β y β' sea A; es decir $T(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_m)$ donde

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \quad , \quad i=1,\ldots,m \ .$$

Por demostrar: rango $\underbrace{\text{FILAS de } A}$ = rango COLUMNAS de A

rango columnas de A^t = rango de T

rango de T = $\underbrace{\text{rango de } T^t}_{\dim \operatorname{Im}(T^t)}$ = $\dim \operatorname{Im}(T)$

4. Recordando que $\operatorname{Im}(T)$ es el subespacio generado por las columnas de A, afirmamos que: el rango de COLUMNAS de A es el rango de la transformación T, porque la imagen de T consta de todos los m-tuples que son combinaciones lineales de los vectores columna de A.

5. Respecto a las bases β'^* y β^*, la aplicación transpuesta T^t.

$$T^t : U^* \longrightarrow V^*$$
$$\beta'^* \qquad\qquad \beta^*$$

está representado por la matriz A^t.

Como las columnas de A^t son las filas de A, se deduce:

Rango de FILAS de A = rango de columnas de A^t = rango de A^t

6. Pero: rango de T^t = rango de T (por el teorema 25), entonces el rango FILAS de A = rango COLUMNAS de A ∎

Importante Conclusión: Si A es la matriz $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$ y $T:\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ es la transformación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$, entonces:

rango(T) = rango de FILAS (A) = rango de COLUMNAS (A) y

se dirá simplemente que este número es el ***rango*** de A.

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 1 (TRANSFORMACIONES LINEALES)

01. Sea V el espacio vectorial de las matrices n-cuadradas sobre $\mathbb{K}$ y M una matriz arbitraria en V. Defínase $T:V \longrightarrow V$ mediante $T(A)=AM+MA$, con $A\in V$. Mostrar que T es lineal.

02. Supóngase que la aplicación lineal $T:V \longrightarrow W$ es inyectiva y suprayectiva. Probar que la aplicación inversa $T^{-1}:W \longrightarrow V$ es también lineal.

03. Supóngase que $T:V \longrightarrow U$ es lineal con núcleo W y que $T(v)=u$. Demostrar que la "variedad afín" $v+W=\{v+w : w\in W\}$ es la preimagen de u, es decir $T^{-1}(u)=v+W$.

04. Sea k un escalar no nulo. Probar que una aplicación lineal T es singular si, y sólo si kT es singular. Por tanto, T es singular si, y sólo si lo es $-T$.

05. Sean $T:V \longrightarrow U$ lineal y W un subespacio de V. La restricción de T a W es la aplicación $T_W : W \longrightarrow U$ definida por $T_W(w)=T(w)$ para todo $w\in W$. Demostrar las siguientes funciones: a) T_W es lineal, b) $Ker\, T_W = Ker\, T \cap W$, c) $\operatorname{Im} T_W = T(W)$.

06. Supóngase que $T:U \longrightarrow V$ es lineal, y que $S:V \longrightarrow W$ es también lineal. Demostrar que $S\circ T : U \longrightarrow W$, definido por $S\circ T(x)=S(T(x))$, es lineal.

07. La proyección de un vector u sobre v está definida por $\operatorname{Proy}_v u = \frac{u\cdot v}{v\cdot v} v$

Sea v un vector fijo de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbb{K}$ el subespacio extendido por v. Defínase $P:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ por $P(x)=\operatorname{Proy}_v x$. Probar que P es lineal.

08. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices $n\times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B una matriz $n\times n$ dada. Si $T(A)=AB-BA$ comprobar que T es una tranformación lineal de V en V.

09. Describa explícitamente la transformación lineal T de $\mathbb{K}^2$ en $\mathbb{K}^2$ tal que $T\varepsilon_1=(a,b)$, $T\varepsilon_2=(c,d)$, donde $\varepsilon_1=(1,0)$, $\varepsilon_2=(0,1)$

10. Describir explicitamente una transformación lineal de $I\!R^3$ en $I\!R^3$ que tiene como imagen el subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(1,2,3)$.

GRUPO 2 (LA GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LIENALES DE $I\!R^2$ EN $I\!R^2$)

Sea $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ una transformación lineal definida por $T(X) = AX$, siendo A una matriz cuadrada 2×2 inversible y $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Definiciones:

01. Una *expansión a lo largo del eje X*, es una transformación lineal definida por:
$T(x,y) = (cx, y)$, $c > 1$.

02. En 1. si $0 < c < 1$, la transformación lineal T es ***una compresión a lo largo del eje X.***

03. Una *expansión a lo largo del eje Y* es una transformación lineal definida por:
$T(x,y) = (x, cy)$, $c > 1$.

04. En 3., si $0 < c < 1$, la transformación lineal T ***es una compresión a lo largo del eje Y.***

05. La transformación lineal $T(x,y) = (y,x)$ ***es una reflexión respecto a la recta y = x.***

06. La transformación lineal $T(x,y) = (x,-y)$ ***es una reflexión respecto al eje X.***

07. La transformación lineal $T(x,y) = (-x,y)$ ***es una reflexión con respecto al eje Y.***

08. La transformación lineal $T(x,y) = (x+cy, y)$ ***es un corte a lo largo del eje X.***

09. La transformación lineal $T(x,y) = (x, cx+y)$ ***es un corte a lo largo del eje Y.***

TAREA 1.

01. Graficar en el plano cartesiano $I\!R^2$, cada una de las transformaciones lineales definida anteriormente.

02. Hallar la matriz de cada transformción lineal dada anteriormente y halle una base para cada uno.

03. Hallar la imagen de T y el nucleo de T, para cada una de las transformaciones lineales dadas.

TAREA 2.

Los puntos $J(2,8)$, $K(4,4)$ y $L(10,7)$ son vértices de un triángulo rectángulo, y los puntos K y L, juntos con $M(8,1)$ y $N(2,-4)$, son vértices de un paralelogramo. En los problemas 1 - 8, se le da a usted una matriz A el cual lo usará para definir una transformación lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ en la manera usual, $T(X) = AX$. Para cada problema, responder las siguientes preguntas.

a) ¿Es la imagen del triángulo *JKL* otro triángulo rectángulo?

b) ¿Es la imagen del paralelogramo *KLMN* otro paralelogramo?

c) ¿Las imagenes de los segmentos $\overline{KM}$ y $\overline{LN}$ bisecan a los otros segmentos?

01. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **02.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ **03.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ **04.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

05. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **06.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **07.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ **08.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

GRUPO 3

I) Representación matricial de una transformación lineal.

01. La transformación lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definida por $T(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$ tal que $x_2 = -x_1$ es llamada una reflexión respecto a la recta $x_2 = x_1$.

a) Haga una repesentación gráfica de T.

b) Halle la matriz de T en la base canónica.

02. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(X) = rX$, $X \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$ es llamado dilatación si $r > 0$ y contracción si $0 < r < 1$.

a) Haga un gráfico que represente a la transformación lineal T.

b) Halle la matriz de T en la base canónica.

03. Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$$

a) Hallar la matriz de T en las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$:

$B = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$

donde: $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (1,0,0)$

$u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,5)$

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$

04. Encontrar la representación matricial de cada una de las aplicaciones lineales escritas a continuación respecto a las bases canónicas de los $\mathbb{R}^n$:

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (3x-y, 2x+4y, 5x-6y)$

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,s,t) = (3x-4y+2s-5t, 5x+7y-s-2t)$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida como $T(x,y,z) = (2x+3y-8z, x+y+z, 4x-5z, 6y)$

Respuesta: $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

05. Sea la aplicación $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $T(x,y) = (2x-3y, x+4y)$. Hallar la matriz T relativa, respectivamente, a las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$.

$B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$

donde: $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,5)$

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$

06. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz en la base canónica de la aplicación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Encontrar la representación matricial de T relativa a las bases $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\{(1,3),(2,5)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Respuesta: $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix}$

07. Considérese las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$ donde $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $u_1 = (1,2)$, $u_2 = (2,3)$.

a) Encontrar las matrices de cambio de base P y Q desde B hasta B', respectivamente. Comprobar que $Q = P^{-1}$.

b) Mostrar que $[v]_B = P[v]_{B'}$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$.

c) Comprobar que $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ para el operador lineal $T(x,y) = (2x-3y, x+y)$.

Respuesta: $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

08. Suponer que $B = \{u_1, u_2\}$ es una base de V y $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal para el que $T(u_1) = 3u_1 - 2u_2$ y $T(u_2) = u_1 + 4u_2$. Supóngase, asimismo, que $B' = \{w_1, w_2\}$ es una base de V en la que $w_1 = u_1 + u_2$ y $w_2 = 2u_1 + 3u_2$. Hallar la matriz de T en la base B' .

Respuesta: $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

09. Un operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mapea

$$u_1 \longmapsto 3u_1 - 4u_2$$
$$u_2 \longmapsto -u_1 + 2u_2$$

a) Encontrar la matriz de T con respecto a la base $D=\{u_1,u_2\}$ donde $u_1=(3,2)$, $u_2=(-1,2)$.

b) Si $w=(2,1)_D$, hallar $T(w)_D$.

10. El operador lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ mapea.

$$u_1 \longmapsto -3u_1+2u_2$$
$$u_2 \longmapsto 4u_1-u_2$$

a) Encontrar la matriz de T respecto a la base D, dado en el problema 09.

b) Si $w=(2,1)_D$, encontrar $T(2,1)_D$.

11. La transformación lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^4$ mapea.

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}-4\\-3\\1\\3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1\\-8\\-5\\3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}0\\8\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Encontrar $T(v)$ donde $v=(4,1,-3)$.

12. La transformación lineal $S: I\!R^4 \longrightarrow I\!R^3$ mapea.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}4\\7\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4\\10\\7\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4\\1\\-2\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}8\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\-1\\-5\end{bmatrix}$$

Encontrar $S(w)$ donde $w=(-1,2,1,3)$

13. Tomando como referencia los problemas 11 y 12, encontrar la matriz que representa a $S\circ T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$. Luego encontrar $S\circ T(v)$.

14. Mostrar que la multiplicación de las matrices cuadradas de segundo orden: a) por la izquierda, b) por la derecha, por una matriz dada $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ es una transformación lineal del espacio de todas las matrices de segundo orden, y hallar las matrices de estas transformaciones en la base compuesta por las matrices:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Respuesta:

a) Al multiplicar por la izquierda

$$\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{bmatrix}$$

b) Al multiplicar por la derecha.

$$\begin{bmatrix}a&0&c&0\\0&a&0&c\\b&0&d&0\\0&b&0&d\end{bmatrix}$$

15. Mostrar que la derivación es una transformación lineal del espacio de todos los polinomios de grado $\le n$ en una indeterminada con coeficientes reales.

Hallar la matriz de esta transformación en la base:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$

b) $1,\ x-c,\ \dfrac{(x-c)^2}{2},\ \ldots,\ \dfrac{(x-c)^n}{n}$, donde $c\in I\!R$.

Respuesta:

a) $$\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&2&0&\cdots&0\\0&0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&n\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

16. Sea $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, con $b\neq 0$, la matriz de un operador $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ en la base canónica. Halle una base de $I\!R^2$ en la cual la matriz de T sea $\begin{bmatrix}0 & 1\\ bc-ad & a+d\end{bmatrix}$.

17. Halle la matriz de la proyección $P: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$, $P(x,y)=(x,0)$, relativo a la base $\{u,v\}\subset I\!R^2$, donde $u=(1,1)$, $v=(1,2)$.

18. Sabiendo que la matriz del operador $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ relativa a la base $\{u,v,w\}\subset I\!R^3$, donde $u=(1,1,1)$, $v=(1,2,1)$, $w=(1,1,3)$, es $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ determine la matriz de T relativa a la base canónica de $I\!R^3$.

19. Considere las transformaciones lineales:

$T: I\!R^{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}_n$, definido por $T(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\alpha_0+\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x^n$

$U: \mathcal{P}_n \longrightarrow I\!R^{n+1}$, definido por $U(p(x))=(p(0), p(1), \ldots, p(n))$

Determine la matriz $UT: I\!R^{n+1} \longrightarrow I\!R^{n+1}$ (en la base canónica) y pruebe que es una matriz inversible.

GRUPO 4 (IMAGEN Y NÚCLEO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL)

01. Sea $T: I\!R^5 \longrightarrow I\!R^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x,y,z,s,t)=(x+2y+z-3s+4t\,,\,2x+5y+4z-5s+5t\,,\,x+4y+5z-s-2t)$$

Hallar una base y la dimensión de la imagen de T.

Respuesta: (1,2,1) y (0,1,2) forman una base de Im T, además $\dim(\text{Im}\,T)=2$.

02. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ la aplicación lineal definida según

$$T(x,y,z)=(x+2y-z\,,\,y+z\,,\,x+y-2z)$$

Hallar una base y la dimensión del núcleo de T.

Respuesta: $\text{Nu}\,T=\mathcal{L}\{(3,-1,1)\}$, $\dim \text{Nu}\,T=1$.

03. Sea la aplicación lineal $T: I\!R^4 \longrightarrow I\!R^2$ donde

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 5 & -2\\ 3 & 8 & 13 & -3\end{bmatrix}$$ es la matriz de T en la base canónica.

a) Hallar la imagen de T. b) Hallar el núcleo de T.

Respuesta: a) La base de la imagen de T es $\{(1,1,3),(0,1,2)\}$, $\dim(\text{Im}\,T)=2$

b) $\{(1,-2,1,0),(-7,3,0,1)\}$ es una base del Nu T, $\dim \text{Nu}\,T=2$.

04. Sea $V=C^{\circ}(I\!R)$ el espacio de las funciones continuas $f: I\!R \longrightarrow I\!R$. Defina el operador lineal $T: V \longrightarrow V$ poniendo, para cada $f\in V$, $Tf=\varphi$, donde $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, $x\in I\!R$. Determine el núcleo y la imagen del operador T.

05. Sea $V=I\!R^\infty$ el espacio vectorial cuyos elementos son las sucesiones $x=(x_1,x_2,\ldots)$ de números reales. Defina los operadores lineales $T,U: V \longrightarrow V$ poniendo $Tx=(x_1,0,x_2,0,x_3,\ldots)$ y $Ux=y$, donde $=(y_1,y_2,\ldots)$, con $y_k=x_{2k+1}-2x_k$. Determine el núcleo y la imagen de T, y lo mismo para U.

06. Halle una transformación lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ tal que $nu\,T=\{(x,y,z): 2x-y-z=0\}$

Respuesta: $TX=AX$, donde $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

En los problemas del 7 al 10 halle el núcleo, el recorrido, el rango y la nulidad de la transformación lineal dada.

07. $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$; definido por $T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}$

08. $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R$; definido por $T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x+y$

09. $T: M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$; definido por $T(A)=AB$, donde $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

10. $T: M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$; definido por $T(A)=A^t+A$

Respuestas:

07. Núcleo $=\{(0,y): y\in I\!R\}$, recorrido $=\{(x,0): x\in I\!R\}$
$\rho(T)=1$, nulidad$(T)=1$.

08. Núcleo $=\{(x,-x): x\in I\!R\}$, recorrido $=I\!R$, $\rho(T)=1$, nulidad $=1$.

09. Núcleo $=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$, recorrido $=M_{22}$, $\rho(T)=4$, nulidad $=0$

10. Núcleo $=\{A: A^t=-A\}$, recorrido $=\{A: A$ es simétrica$\}$, $\rho(T)=\dfrac{(n^2+n)}{2}$;
nulidad $=\dfrac{(n^2-n)}{2}$

11. Suponga que $T: M_{nn}\longrightarrow M_{nn}$ se define por $TA=A-A^t$. Muestre que el $nu\,T=\{$matrices simétricas $n\times n\}$, recorrido $T=\{$matrices antisimétricas de $n\times n\}$.

12. Sea V el espacio vectorial de las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes y sea $D: V\longrightarrow V$ la derivada. ¿Cuál es el núcleo de D?

Respuesta: Funciones constantes.

13. Sea D^2 la segunda derivada (esto es, la iteración de D tomada dos veces). ¿Cuál es el núcleo de D^2? En general, ¿cuál es el núcleo de D^n (la n-ésima derivada)?.

Respuesta: $\ker D^2=$ polinomios de grad ≤ 1,
$\ker D^n=$ polinomios de grad $\leq n-1$

14. a) Sean V y D como aparecen en el ejercicio 12. Sea $L=D-I$, donde I es la aplicación identidad de V. ¿Cuál es el núcleo de L?
b) ¿Cuál es el núcleo de L si ahora $L=D-aI$, donde a es un número?

Respuesta: a) múltiplos constantes de e^x
b) múltiplos constantes de e^{ax}

15. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow V$ una transformación lineal de $I\!R^3$ a cualquier espacio vectorial. Demuestre que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen; un plano que pasa por el origen; únicamente el origen o todo $I\!R^3$.

16. Sea $T: V\longrightarrow I\!R^3$ una transformación lineal de cualquier espacio vectorial a $I\!R^3$. Demuestre que la imagen de T es una recta que pasa por el origen; un plano que pasa por el origen; únicamente el origen o todo $I\!R^3$.

17. Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ un operador lineal, donde

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 7\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la base usual.

a) Demuestre que la imagen de T es un plano que pasa por el origen y encuentra su ecuación.

b) Demuestre que el núcleo de T es una recta que pasa por el origen y encuentre sus ecuaciones paramétricas.

Respuesta: a) $14x-8y-5z=0$
a) $x=-t$, $y=-t$, $z=t$, $t\in I\!R$

18. Sea $J: P_1\longrightarrow I\!R$ la transformación de integración $J(P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}p(x)\,dx$. Describa el núcleo de J.

Respuesta: $\ker(J)$ consta de todos los polinomios de la forma kx.

19. Sea $L: P_2\longrightarrow I\!R$ definido por $L(at^2+bt+c)=\displaystyle\int_0^1(at^2+bt+c)\,dt$. Hallar $\ker(L)$.

Respuesta: $\ker(L)$ consta de todos los polinomios en P_2 de la forma:

$$at^2+bt+\left(-\tfrac{a}{3}-\tfrac{b}{3}\right) \; ; \; a\in I\!R \; , \; b\in I\!R$$

Una base para $\ker(L)$ es $\left\{t^2-\frac{1}{3},\, t-\frac{1}{2}\right\}$ y $\dim(\ker(L))=2$.

20. Dada la transformación lineal $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, definido por $T(X) = AX$, donde

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

a) ¿Es T suryectiva? b) ¿Es T inyectiva?

c) Hallar una base de la $\text{Im}(T)$ d) Hallar el núcleo de T.

Respuesta: a) T no es suryectiva. b) T no es inyectiva.

c) Una base de la $\text{Im}(T)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

d) Una base es el núcleo de T es $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

21. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, cuyo núcleo es $\{0\}$. Supóngase que V y W tienen la misma dimensión igual a n. Demostrar que la imagen de T es todo W.

22. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y supóngase que la imagen de T es todo W. Supóngase que V y W tienen la misma dimensión, igual a n. Demostrar que el núcleo de T es $\{0\}$.

23. Sea $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Sea $w \in W$. Sea v_0 un elemento de V tal que $T(v_0) = w$. Demostrar que cualquier solución de la ecuación $T(X) = w$ es del tipo $v_0 + u$, donde u es un elemento del núcleo de T.

24. Sea la transformación lineal $T: IR^3 \longrightarrow P_2$, definida por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

a) Probar que T es lineal, b) Probar que T es un isomorfismo.

25. Suponga que $V = P_4$ y $W = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$. Muestre que $V \cong W$ (se lee V es isomorfo a W).

26. Suponga que $T: C[0,1] \longrightarrow C[3,4]$ está definida por $T\,f(x) = f(x-3)$. Muestre que T es un isomorfismo.

27. Sea B una matriz inversible de $n \times n$. Muestra que $T: M_{nm} \longrightarrow M_{nm}$, definida por $T(A) = AB$, es un isomorfismo.

28. Muestre que si $T: IR^n \longrightarrow IR^n$ se define por $T(X) = AX$ y si T es un isomorfismo, entonces A es inversible y la tansformación inversa T^{-1} está dada por $T^{-1}(X) = A^{-1}X$.

29. Pruebe que $\mathbb{C} \cong IR^2$.

30. Pruebe que $\mathbb{C}^n_{IR} \cong IR^{2n}$, donde:

$\mathbb{C}^n_{IR} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) : c_i \in \mathbb{C}$ y los escalares son los reales$\}$

31. Sea $T \in \mathfrak{L}(V,W)$. Probar que si B es una base de V y si $T(B) = \{T(b) / b \in B\}$ es una base para W, entonces T es un isomorfismo de V en W.

32. Sea $T \in \mathfrak{L}(V,W)$. Probar que T es inyectiva si, y sólo si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independiete en V, luego $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ son linealmente independiente en W.

33. Sea $T \in \mathfrak{L}(V)$, donde $\dim(V) < \infty$. Si $rk(T^2) = rk(T)$ demostrar que $\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$.

Nota: rk = rango.

34. Sea $T \in \mathfrak{L}(U,V)$ y $U \in \mathfrak{L}(V,W)$. Demostrar que $rk(TU) \le \min\{rk(T), rk(U)\}$.

35. Sea $T \in \mathfrak{L}(U,V)$ y $U \in \mathfrak{L}(V,W)$. Demostrar que $null(TU) \le null(T) + null(U)$.

Nota: null = nulidad.

GRUPO 5

01. Sabiendo que la matriz del operador $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$ relativa a la base $\{v_1, v_2, v_3\} \subset IR^3$, donde $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,1,3)$ es $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ determine la matriz de A relativa a la base canónica IR^3.

02. Obtenga las bases $B_1 \subset IR^2$ y $B_2 \subset IR^3$ respecto a las cuales la matriz de la transformación lineal $T: IR^2 \longrightarrow IR^3$, definida mediante $T(x,y) = (2x+y, 3x-2y, x+3y)$, tienen las filas $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,0)$.

03. En cada inciso, $B=(f_1,f_2,f_3)$ es una base del subespacio V del espacio vectorial de las funciones reales defiidas en toda la recta real. Encuentre la matriz con respecto a B del operador de diferenciación $D:V \longrightarrow V$.

a) $f_1=1$, $f_2=sen\,x$, $f_3=cos\,x$ b) $f_1=1$, $f_2=e^x$, $f_3=e^{2x}$

c) $f_1=e^{2x}$, $f_2=xe^{2x}$, $f_3=x^2e^{2x}$

04. Sea $T^2:I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ una aplicación lineal tal que $T\neq 0$ pero $T^2=T\circ T=0$.

Demostrar que existe una base $\{u,v\}$ de $I\!R^2$ tal que $T(u)=v$ y $T(v)=0$.

05. Sea $T:V \longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^2=0$. Demostrar que $I-T$ es inversible.
(I es la aplicación identidad definida sobre V).

06. a) Sea $T:V \longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^2+2T+1=0$. Demostrar que T es inversible.

b) Sea $T:V \longrightarrow V$ un operador lineal tal que $T^3=0$. Demostrar que $I-T$ es inversible.

07. Sea $\phi_1:I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ y $\phi_2:I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ los funcionales lineales definidos por $\phi_1(x,y,z)=2x-3y+z$ y $\phi_2(x,y,z)=4x-2y+3z$. Hallar.

a) $\phi_1+\phi_2$, b) $3\phi_1$, c) $2\phi_1-5\phi_2$.

Respuestas: a) $6x-5y+4z$, b) $6x-9y+3z$, $-16x+4y-13z$

08. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $I\!K$. Para $a\in I\!K$, defínase $\phi_a:V \longrightarrow I\!K$ según $\phi_a(f(t))=f(a)$. Probar que:

a) ϕ_a es lineal ; b) Si $a\neq b$, necesariamente $\phi_a\neq\phi_b$.

Respuesta: a) Sea $f(t)=t$. Entonces $\phi_a(f(t))=a\neq b=\phi_b(f(t))$ y por tanto $\phi_a\neq\phi_b$.

09. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2. Sean $a,b,c\in I\!K$ escalares distintos y ϕ_a, ϕ_b, ϕ_c los funcionales lineales definidos por $\phi_a(f(t))=f(a)$, $\phi_b(f(t))=f(b)$, $\phi_c=(f(t))=f(c)$. Probar que $\{\phi_a,\phi_b,\phi_c\}$ es linealmente independiente y encontrar la base $\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$ de V que es su dual.

Respuesta: a) $\left\{ f_1(t)=\dfrac{t^2-(b+c)t+bc}{(a-b)(a-c)},\ f_2(t)=\dfrac{t^2-(a+c)t+ac}{(b-a)(b-c)},\ f_3(t)=\dfrac{t^2-(a+b)t+ab}{(c-a)(c-b)} \right\}$

CAPÍTULO **5**

VALOR PROPIO Y VECTOR PROPIO

(FORMAS CANÓNICAS ELEMENTALES)

1. VALOR PROPIO Y VECTOR PROPIO

Definición 1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!K$ y sea T un operador lineal sobre V. Un valor propio de T es un escalar λ de $I\!K$ tal que existe un vector no nulo v tal que $T(v)=\lambda v$. Si λ es un valor propio de T, entonces:

a) cualquier v tal que $T(v)=\lambda v$ se llama un **vector propio** de T asociado al valor propio λ,

b) la colección de todos los v tales que $T(v)=\lambda v$ se llama espacio **propio asociado** a λ.

TEOREMA 1. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y sea λ un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) λ es un valor propio de T.

ii) El operador $(T-\lambda I)$ es singular (no inversible)

iii) $\det(T-\lambda I)=0$

Demostración:

$(i)\ \Rightarrow\ (ii)$

Si λ es un v.p. de $T\Rightarrow \exists\ v\neq 0$ tal que $T(v)=\lambda v$, lo cual implica $T(v)-\lambda I(v)=0$, entonces $(T-\lambda I)(v)=0$, luego el núcleo de $T-\lambda I$ es NO NULO y $T-\lambda I$ no puede ser inversible (un operador és inversible si es inyectiva).

$(ii)\ \Rightarrow\ (iii)$

Si $(T-\lambda I)$ es singular entonces existe $v\neq 0$ tal que $(T-\lambda I)(v)=0$ y $\det(T-\lambda I)=0$

$(iii)\ \Rightarrow\ (i)$

Si $\det(T-\lambda I)=0$, entonces existe $v\neq 0$ tal que $(T-\lambda I)(v)=0$, lo cual implica que $T(v)-\lambda v=0$, entonces $T(v)=\lambda v$, lo cual prueba que λ es valor propio de T.

- Los valores propios de T se llaman también raíces características, valores característicos, valores espectrales, eigen valores.
- El conjunto de vectores $E_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ es un subespacio de V, llamado subespacio propio de V o espacio nulo de $T - \lambda I$, esto es $E_\lambda = Ker(T - \lambda I)$, $I(v) = v$ es la $t.\ell.$ identidad.
- Se llama a λ un valor propio de T si $E_\lambda \neq \{\mathbf{O}\}$, donde $\{\mathbf{O}\}$ es el subespacio NULO.
- Si $Ker(-\lambda I) \neq \{\mathbf{O}\}$, entonces $T - \lambda I$ no es inyectiva.
- Si V es de dimensión finita, el operador $T - \lambda I$ no es inyectiva, cuando su $\det(T - \lambda I) = 0$.
- El criterio del determinante dado en (*iii*), nos permite hallar los valores propios de T, de forma sencilla.

Definición 2. Si A es una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo $I\!K$, un valor propio de A en $I\!K$ es un escalar λ de $I\!K$, tal que, la matriz $(T - \lambda I)$ es singular (no inversible).

2. POLINOMIO CARACTERÍSTICO

- La matriz $(T - \lambda I)$ es singular si, y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$

  Así obtendremos el polinomio mónico de grado n $\boxed{P(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$, llamado ***polinomio característico de A***. Las raíces de $P(\lambda)$ son los valores propios de T.

Ejemplo 01.

Sea el operador $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$

representado en la base canónica por la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

El polinomio característico de T (o de A), es:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Como $P(\lambda)$ no tiene raíces reales y T es un operador lineal sobre $I\!R^2$, afirmamos que T no tiene valores propios.

Ejemplo 02.

Si se tiene el operador $U : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ representado, en la base canónica, por la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ son $\{i, -i\}$. Entonces U tiene dos valores propios i y $-i$ en $\mathbb{C}$.

LEMA 1. Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Demostración:

B es semejante a A sobre $I\!K$, si existe una matriz inversible $n \times n$ P sobre $I\!K$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Debo probar que: $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

Veamos:

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) \quad , \quad \text{Pero } I = P^{-1}P$$
$$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P)$$
$$= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P]$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P$$
$$= \underbrace{\det P^{-1} \cdot \det P}_{1} \cdot \det(A - \lambda I)$$
$$= \det(A - \lambda I)$$

Ejemplo 03. La matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ es semejante a la matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ porque existe una matriz no singular $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ tal que: $A = PBP^{-1}$ o $B = P^{-1}AP$.

Los vectores columna de la matriz P son los vectores propios de la matriz A.

Definición 3. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es **diagonalizable** si existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V tal que v_i de B sea **un vector propio de** T.

Ejemplo 04. Supongamos que T es el operador lineal sobre $I\!R^3$ representado por la matriz $A=\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$ en la base canónica.

- El polinomio característico de A es $p(\lambda)=\lambda^3-(trA)\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-\det A$.

$$=\lambda^3-6\lambda+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

- Los valores propios de A son: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1=1$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2=2$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_3=3$
- Una base de $V=I\!R^3$ es $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$; por lo tanto T es diagonalizable.

NOTA Según la definición, la matriz A de orden n deberán tener n vectores propios para afirmar que T es diagonalizable. Pero, si $k<n$, siendo k el número de vectores propios de A, entonces T no es diagonalizable.

Ejemplo 05. Dado la matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Los valores propios de A son: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=i\sqrt{3}$, $\lambda_3=-i\sqrt{3}$
- Afirmamos: A no es diagonaliza sobre $I\!R$, porque sólo existe una raíz real.

  A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, porque existen 3 raices complejas.

El vector propio asociado a $\lambda_1=0$, es:	El vector propio asociado a $\lambda_2=i\sqrt{3}$, es:	El vector propio asociado a $\lambda_3=-i\sqrt{3}$, es:
$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$v_2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$

A continuación discutiremos, en forma paralela, dos ejemplos, que nos servirán como preámbulo para luego enunciar los teoremas que confirman la validez de las proposiciones que se plantean en cada problema.

Ejemplo 06.

Sea T un operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar el polinomio característico de A.

b) Hallar los valores propios de T (de A) y los vectores propios.

c) Hallar el espacio de los vectores propios asociados con cada valor característico (llamado también subespacio propio asociado al valor propio).

d) Hallar una base de V, si existe, cuyos elementos sean los vectores propios de T.

e) ¿Es diagonizable la matriz A?

f) Sea W_i el espacio de los vectores propios asociados con el valor característico λ_i.

Si $W=W_1+\ldots+W_k$ entonces $\dim W=\dim W_1+\ldots+\dim W_k$

Ejemplo 07.

Sea T un operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz

$$B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar el polinomio característico de B.

b) Hallar los valores propios de T (de B) y los vectores propios.

c) Hallar el espacio de los vectores propios asociados con cada valor característico.

d) Hallar una base de V, si existe, cuyos elementos sean los vectores propios de T.

e) ¿Es diagonalizable la matriz B?

f) Sea W_i el espacio de los vectores propios asociados con el valor característico λ_i.

Si $W=W_1+\ldots+W_k$, entonces $\dim W=\dim W_1+\ldots+\dim W_k$

g) Si T es diagonalizable implica que el polinomio característico de T es:

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{d_k}$$

donde $\dim W_1=d_1,\ldots,\dim W_k=d_k$ implica que:

$$\dim V=\dim V_1+,\ldots,\dim V_k$$

Solución:

a) El polinomio característico de T es:

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&-1\\2&5-\lambda&-2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-11\lambda^2+39\lambda-45$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

b) Los valores propios se hallan al resolver:

$$(\lambda-3)^2(\lambda-5)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=3 \quad \lambda=5$$

En consecuencia, $\lambda_1=3$ y $\lambda_2=5$ son los valores propios de A.

- Hallemos los vectores propios asociados a cada valor propio.
  - ♦ El (o los) vector(es) propio(s) asociado al valor propio $\lambda_1=3$ se obtiene al resolver el sistema homogéneo:

Solución:

a) El polinomio característico de T es:

$$P(\lambda)=\det(B-\lambda I)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}-3-\lambda&1&-1\\-7&5-\lambda&-1\\-6&6&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-12\lambda-16$$

$$=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

b) Los valores propios se hallan al resolver:

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=-2 \quad , \quad \lambda=4$$

En consecuencia, $\lambda_1=-2$ y $\lambda_2=4$ son los valores propios de B.

- Hallemos los vectores propios asociados a cada valor propio.
  - ♦ Los vectores propios se hallan al resolver la ecuación homogénea:

$$(A-3I)X=0\begin{cases}I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}4-3&1&-1\\2&5-3&-2\\1&1&2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(-1) (-2) $+$ $+$

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la primera fila se obtiene:

$$x_1+x_2-x_3=0$$

$$x_3=x_1+x_2$$

El vector solución del sistema es:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Vectores propios asociados a $\lambda_1=3$

$$(B-\lambda I)X=\mathbf{0}\begin{cases}\lambda:\text{valor propio}\\I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\\X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

para cada valor propio λ.

Veamos:

- Para: $\lambda_1=-2$

$$(B-(-2)I)X=\mathbf{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

por $-1\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

(6) (7) $+$ $+$

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$(*)\quad\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&6\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$, es:

$$W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$
$$\quad\quad v_1 \quad v_2$$

Se lee: "W_1 es el subespacio propio generado por los vectores propios v_1 y v_2".

- También, es cierto que el núcleo del operador $T-3I$ está formado por los vectores propios v_1, v_2. Esto es:

  $\text{Ker}\,(T-3I) = \{v_1, v_2\}$

- W_1 **es el espacio nulo** de $T-3I$.
- Se cumple: $T(W_1) \subset W_1$

Definición.- W_1 es invariante por T, si $T(W_1) \subset W_1$.

- El vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 5$, se obtiene al resolver el sistema homogéneo:

$$(A-5I)\,X = \mathbf{O}$$

$$\begin{bmatrix}4-5 & 1 & -1\\ 2 & 5-5 & -2\\ 1 & 1 & 2-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(1), (2):

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma canónica.

por $\frac{1}{6}\to$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(-6), (-1):

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la primera y segunda filas, obtenemos:

$$x_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = x_1$$
$$x_3 = 0$$

Entonces el vector solución es:

$$X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_1\\0\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$v_1$$

v_1 es vector propio asociado a $\lambda_1 = -2$

NOTA ✍

El vector propio, ya se puede obtener de (*), resolviéndose:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$6\,x_3 = 0$$

(-1):

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

por $(-1)\to$, por $\frac{1}{2}\to$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$+$:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la primera y segunda filas se obtienen:

$$\begin{cases}x_1 - x_3 = 0\\ x_2 - 2x_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1 = x_3\\ x_2 = 2x_3\end{cases}$$

El vector solución es:

$$X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_3\\2x_3\\x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$
$$v_3$$

Vector propio asociado a $\lambda_2 = 5$

- El subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 5$, es:

$$W_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

c) El subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -2$, es:

$$W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$
$$v_1$$

Se lee "el subespacio W_1 está generado por el vector propio v_1".

- **El núcleo del operador $T-2I$ está formado por el único vector propio v_1, esto es: Ker $(T+2I) = \{v_1\}$**
- **W_1 es el espacio nulo de $T-2I$.**
- **Además: $T(W_1) \subset W_1$**
- **Para: $\lambda_2 = 4$; $(B-4I)\,X = 0$**

$$\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Reducir

Multiplicar por (−1) a la 1ra fila y sumar a la 2da fila. Luego multiplicar por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ la 3ra fila.

$+$, (7):

$$\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Multiplicar por 7 a la 3ra fila y sumar a 1ra fila.

$$\begin{bmatrix}0 & -6 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Se lee "W_2 es el subespacio propio generado por v_3".

- El núcleo del operador $T-5I$ está formado sólo por el vector v_3. Esto es:

  $$\text{Ker}\,(T-5I)=\{v_3\}.$$

- W_2 es el ESPACIO NULO de $T-5I$.
- $T(W_2)\subset W_2$, esto es, W_2 es invariante por T.

d) Una base de V cuyos elementos son los vectores propios de T, es:

$$B=\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}},\underset{v_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}},\underset{v_3}{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}\right\}$$

e) Porque la base B tiene tres vectores propios linealmente independientes, afirmamos que la matriz A es ***diagonalizable***.

Sea P la matriz con columnas los vectores propios v_1, v_2, v_3.

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

se cumple:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&5\end{bmatrix}=D$$

matriz diagonal, sus elementos son los valores propios de A.

- A es semejante a D, porque existe una matriz inversible P, tal que: $D=P^{-1}AP$.

Permutar: La 3ra fila a la 1ra fila, la 1ra fila a la 2da fila y la 2da fila a la 3ra fila:

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-6&6\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Multiplicar la 2da fila por $-\frac{1}{6}$ y sumar a la 1ra fila:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la 1ra fila y de la 2da fila se obtienen:

$$x_1=0$$
$$x_2-x_3=0 \implies x_3=x_2$$

El vector solución es:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_2\end{bmatrix}=x_2\underset{v_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}$$

Vector propio asociado a $\lambda_2=4$

El subespacio propio asociado a $\lambda_2=4$ es:

$$W_2=gen\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

se lee "el subespacio vectorial W_2 está generado por el vector propio v_2".

- El núcleo del operador $T-4I$ está formado por el único vector propio v_2, esto es: $Ker\,(T-4I)=\{v_2\}$
- Además: $T(W_2)\subset W_2$, esto es W_2 es invariante por T.
- W_2 es el espacio nulo de $T-4I$.

f) Los subespacios propios asociados a cada valor característico, son:

Para $\lambda_1=3$: $W_1=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Para $\lambda_2=5$: $W_2=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

g) Como el polinomio característico es:

$$P(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-5)^1$$

y $2=\dim W_1$, $1=\dim W_2$

implica $\dim V=2+1$; $V=I\!R^3$

$\dim V=\dim V_1+\dim V_2$

NOTA ✍

Este resultado es un ejemplo del Teorema 2 que a continuación enunciaremos.

d) El conjunto de vectores propios $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ no es una base de $V=I\!R^3$

e) Como la matriz B tiene un máximo de dos vectores propios linealmente independientes, no es similar a una matriz diagonal, o sea, ***B no es diagonalizable.***

f) Los subespacios propios asociados a cada valor característico, son:

- Para $\lambda_1=-2$: $W_1=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$
- Para $\lambda_2=4$: $W_2=gen\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

g) El polinomio característico es:

$$p(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)^1$$

En este caso: $2\neq\dim W_1$; $1=\dim W_2$

Se tiene: $W=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

W es un nuevo subespacio de $V=I\!R^3$, que se obtiene sumando directamente W_1 con W_2, esto es,

$$W=W_1+W_2 \text{ y}$$
$$\dim W=\dim W_1+\dim W_2=1+1=2$$

NOTA ✍

Es un ejemplo del Lema 3.

Definición 4. Supongamos que λ es un valor propio de A. La multiplicidad algebraica de λ es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de A. La multiplicidad geométrica de λ es la dimensión de su espacio propio.

En el ejemplo 6, se tiene: $P(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda-5)^1$

- La multiplicad algebraica de $\lambda_1=3$ es 2 y la dim $W_1=2$ = multiplicidad geométrica de $\lambda_1=3$. En este caso la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de $\lambda_1=3$, coinciden.

En el ejemplo 7, se tiene: $P(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)^1$

- La multiplicidad algebraica de $\lambda_1=-2$ es 2 pero la dim $W_1=1$ = multiplicidad geométrica de $\lambda_1=-2$.

Como se observará, en este caso, la multiplicidad algebraica de $\lambda_1=-2$ no es igual a la multiplicidad geométrica del mismo.

LEMA 2. Supongamos que $T(v)=\lambda v$. Si f es cualquier polinomio, entonces:

$$f(T)v=f(\lambda)v$$

- v: es un vector
- $f(\lambda)$: es un polinomio en λ
- $f(T)$: es un operador expresado como un polinomio en T.

$f(T)\,v$: es la aplicación del operador $f(T)$ sobre el vector v.
$f(A)\,v$: es el producto de la matriz $f(A)$ por la matriz v.
$f(\lambda)\,v$: es el producto del número real $f(\lambda)$ por el vector v.

Demostración:

- Sea A la matriz de T en la base canónica.
- Sea λ un valor propio de T y v el vector propio correspondiente a λ.
- Sea $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$ un polinomio de grado n.
- Si $Av=\lambda v$, entonces $A^nv=\lambda^nv$ y $Iv=v$. Debo probar que: $f(A)v=f(\lambda)v$

Veamos:

- Se tiene : $f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I$
- Por v :

$$\begin{aligned} f(A)v &= a_nA^nv+a_{n-1}A^{n-1}v+\ \ldots\ +a_1Av+a_0Iv \\ &= a_n\lambda^nv+a_{n-1}\lambda^{n-1}v+\ldots+a_1\lambda v+a_0v \\ &= \underbrace{(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0)}_{f(\lambda)}v \\ &= f(\lambda)\,v\,. \end{aligned}$$

■

LEMA 3. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ los valores propios distintos de T, y sea W_i el espacio de los vectores propios asociados con el valor característico λ_i.

Si	$W=W_1+W_2+\ldots+W_k$
entonces	$\dim(W)=\dim W_1+\ldots+\dim W_k$

En efecto, si B_i es la base ordenada de W_i, entonces $B=(B_1,\ldots,B_k)$ es una base ordenada de W.

Demostración: (ejercicio)

Este lema afirma que los espacios propios asociados a los diferentes valores propios son independientes uno de otros.

Ver los ejemplos 6 y 7.

TEOREMA 2. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ los valores propios distintos de T y sean W_i es espacio nulo de $(T-\lambda_iI)$. Lo siguiente es equivalente.

1) T es diagonalizable.

2) El polinomio característico de T es: $f(x)=(x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\ldots(x-x_k)^{d_k}$
y $\dim W_i=d_i$, $i=1,2,\ldots,k$

3) $\dim W_1+\ldots+\dim W_k=\dim V$

Demostración:

Tenemos como hipótesis:

h_1 : T es un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita.
h_2 : $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ son valores propios distintos de T.
h_3 : $W_i=\ker(T-\lambda_iI)$

$\ker$: es el núcleo (espacio nulo) de $T-\lambda_i I$

(1) ⇒ (2) .... (probar que (1) implica (2))

Si T es diagonalizable puede ocurrir uno de los siguientes dos casos:

CASO 1. Por h_2, si se tienen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ "n" valores propios distintos de T, entonces el polinomio característico es $f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$ y $\dim W_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

CASO 2. Por h_2, si se tienen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ "k" vectores propios distintos de T, con $k < n$, y si λ_1 tiene multiplicidad algebraica d_1

λ_2 tiene multiplicidad algebraica d_2

$\vdots$

λ_k tiene multiplicidad algebraica d_k

entonces el polinomio característico es:

$$f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\ldots(x-\lambda_k)^{d_k}$$

donde $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n =$ grado del polinomio mónico $f(x)$.

Si, a su vez, ocurre que: el operador $T - \lambda_1 I$ tiene d_1 vectores propios,

el operador $T - \lambda_2 I$ tiene d_2 vectores propios,

$\vdots$

el operador $T - \lambda_k I$ tiene d_k vectores propios,

entonces $\dim W_i = \dim[Ker(T - \lambda_i I)] = d_i$

Además:

Por el caso 1, la matriz diagonal es:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por el caso 2, la matriz diagonal es:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_k \end{bmatrix}$$

donde I_j es la matriz identidad de orden $d_j \times d_j$

(2) $\Rightarrow$ (3) ……… (probar que (2) $\Rightarrow$ (3))

Del caso 1, se deduce que: $\dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n = \dim V$

Del caso 2, se deduce que: $\dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_k = d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n = \dim V$

(3) $\Rightarrow$ (1) ………….. (probar que (3) $\Rightarrow$ (1))

Si se cumple (3) entonces, por el lema 3, se debe tener que $V = W_1 + \ldots + W_k$, es decir, que los vectores propios de T generan V y por tanto T es diagonalizable.

lqqd.

3 POLINOMIOS ANULADORES

Introducción.-

Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre el espacio vectorial V.

Sea:

(1) $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, un polinomio mónico de $I\!K[x]$ de grado k.

Si la variable x la sustituimos por T, obtenemos:

(2) $f(T) = T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0 I$, que es otro operador sobre V, esto es $f(T): V \longrightarrow V$.

Si la variable x la sustituimos por la matriz $A_{n\times n}$, obtenemos:

(3) $f(A) = A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$, que es otra matriz $n \times n$.

Si $f(T) = 0$, diremos que $f(x)$ es un polinomio anulador de T.

Si $f(A) = 0$, diremos que $f(x)$ es un polinomio anulador de A.

Además, si $f(A) = 0$, obtenemos una relación lineal entre potencia de A:

(4) $A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$. Ahora, nuestro interés es hallar un polinomio de la forma (1) de grado mínimo, tal que $f(T) = 0$, este polinomio se llamará **polinomio minimal**.

- Sea $L(V,V)=\{T/T:V\longrightarrow V\}$ el conjunto de operadores lineales sobre V.

Se sabe que la dimensión del espacio vectorial $L(V,V)$ es n^2.

Las primeras (n^2+1) potencias de T son: $I, T, T^2, T^3, \ldots, T^{n^2}$ entonces este conjunto de n^2+1 vectores es linealmente dependiente, esto es:

$$C_0 I + C_1 T + C_2 T^2 + \ldots + C_{n^2} T^{n^2} = 0$$

para los escalares C_i, no todos nulos.

- En la ecuación (4), para cada k se tiene un sistema de n^2 ecuaciones lineales para las incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ en $I\!K$.

- En (2) dijimos que $f(T):V\longrightarrow V$ es un operador sobre V, porque es la suma de operadores $T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \ldots + a_1 T + a_0 I$

donde
$$\begin{aligned} I &: V \longrightarrow V \quad \text{es el operador identidad y} \\ T &: V \longrightarrow V \\ T^2 &: V \longrightarrow V \\ &\vdots \\ T^{k-1} &: V \longrightarrow V \\ T^k &: V \longrightarrow V \end{aligned}$$

- La notación $f(T)\,v$ es como escribir $(f(T))(v)$, donde:

$$\begin{aligned} f(T) &: V \longrightarrow V \\ & \quad v \longmapsto (f(T))(v) \end{aligned}$$

- La aplicación identidad es : $Iv = v$

Definición de valor propio de T es : $Tv = \lambda v$, $v \neq 0$

Sus potencias son : $T^2 v = \lambda^2 v$

$T^3 v = \lambda^3 v$

$\vdots$

$T^k v = \lambda^k v$

Sumar: $\quad I\,v + Tv + T^2 v + \ldots + T^k v = v + \lambda v + \lambda v + \ldots + \lambda^k v$

$$\underbrace{(I+T+T^2+\ldots+T^k)}_{f(T)}v = \underbrace{(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^2)}_{f(\lambda)}v$$

$f(T) = I + T + T^2 + \ldots T^k$ es un polinomio en T.

$f(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots \lambda^k$ es un polinomio en λ.

Ilustremos con tres ejemplos, el tema relativo a los polinomios anuladores del operador T y al polinomio minimal de T.

Ejemplo 01.

Dado la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Se pide:

a) Hallar el polinomio característico de A (denotado por $p(t)$).

b) De (a) obtener otros polinomios, que sean divisores de $p(t)$, tal que la matriz A sea un anulador.

c) De b) elija usted, el polinomio mónico de grado mínimo $m(t)$, tal que, $m(A) = 0$

Solución:

a) El polinomio característico de A, es: $P(t) = t^3 - (TrA)\,t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\,t - |A|$

donde: $\quad$ tr A = Traza de A = suma de los términos de la diagonal

$= (2) + (7) + (-4) = 5$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (7)(-4) - (2)(-15) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (1)(-5) = -3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7) - (3)(2) = 8$$

$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 2 - 3 + 8 = 7$

$$|A| = \begin{array}{ccc} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \end{array} = (2)(7)(-4) + (3)(2)(-5) + (1)(2)(-15) - [(1)(7)(-5) + (2)(2)(-15) + (3)(2)(-4)] = 3$$

Entonces el polinomio característico, es:

$P(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$

$P(t) = (t-3)(t-1)^2$ — **DIVISORES DE** $p(t)$:

$f(t) = (t-3)(t-1)$

$h(t) = t - 3$

$q(t) = t - 1$

$r(t) = (t-1)^2$

b) • Por el Teorema de Cayley – Hamilton: "La matriz A es un cero de su polinomio característico", esto es $P(A) = (A - 3I)(A - I)^2 = \mathbb{O}$, $\mathbb{O}$ es la matriz nula. Es decir, el polinomio característico es el primer anulador del operador T.

• Ahora, busquemos otros polinomios anuladores, si existen, de igual o menor grado que $p(t)$.

Lo menos que se puede pensar es en el factor irreductible de $p(t)$, que es: $f(t) = (t-3)(t-1)$.

Hacer el cálculo: $f(A) = (A - 3I)(A - I)$

Haciendo las sumas y producto de matrices, obtendremos que:

$$f(A) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

• Como se puede apreciar, el polinomio característico es el primer anulador de la matriz A. Otro polinomio anulador de A es $f(t) = (t-3)(t-1)$.

El grado de $P(t)$ es "3"

El grado de $f(t)$ es "2"

No hay otro polinomio mónico de menor grado que la de $f(t)$ que sea anulador de A.

• Además, el polinomio minimal $m(t)$ es divisor de $P(t)$.

c) De estos dos polinomios anuladores, el de menor grado es $f(t)$, entonces $f(t)$ es el polinomio minimal. Denotaremos con $m(t)$ al polinomio minimal.

Esto es, $m(t) = (t-3)(t-1)$ es el polinomio minimal de A.

• Otros polinomios anuladores de A, son los múltiplos de $m(t)$, esto es:

$$J(A) = \{h(t) = m(t)\,g(t),\ g(t) \in I\!K[t]\}$$

polinomio minimal ($m(t)$)

esta colección de polinomios anuladores de A, es un ideal en el álgebra de polinomios $I\!K[x]$.

Ejemplo 02.

Dado la matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Su polinomio característico es $p(t) = (t-1)(t-2)^2$

En este caso, de todos los polinomios anuladores de A, el polinomio anulador de A de mínimo grado es el mismo polinomio característico.

Esto es: $m(t) = (t-1)(t-2)^2$

El anillo de polinomios anuladores de A es:

$$J(A) = \{h(t) = (t-1)(t-2)^2 g(t),\ g(t) \in I\!K[x]\}$$

Ejemplo 03.

Dado la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Hallar el polinomio minimal de A.

Solución:

En este ejemplo, la matriz A es diagonal por bloques.

Algunos bloques pueden ser submatrices diagonales o triangulares.

Los bloques de submatrices son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = [7]$$

$$P_1(t) = (t-2)^2 \qquad P_2(t) = t^2 - 9t + 14 = (t-2)(t-7) \qquad P_3(t) = (t-7)$$

Para hallar el polinomio característico de una matriz diagonal por bloques, seguir los siguientes:

PASO 1. Hallar el polinomio característico de cada submatriz de A.

El polinomio característico de la submatriz A_1 es $P_1(t) = (t-2)^2$

El polinomio característico de la submatriz A_2 es $P_2(t) = t^2 - 9t + 14$
$= (t-2)(t-7)$

El polinomio característico de la submatriz A_3 es $P_3(t) = t - 7$.

PASO 2. El polinomio característico de la matriz A, es el producto de los polinomios P_1, P_2, P_3; esto es: $P(t) = P_1(t)\, P_2(t)\, P_3(t)$
$= (t-2)^3 (t-7)^2$

- El polinomio minimal de la matriz A, es el mínimo común múltiplo de los polinomios $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $P_3(t)$; esto es, $m(t) = (t-2)^2 (t-7)$.
- Por lo tanto, $m(A) = (A-2I)^2 (A-7I) = 0$
- El ideal de polinomios anuladores de A, es:
  $J(A) = \{(t-2)^2 (t-7)\, g(t),\, g(t) \in I\!K[t]\}$

A continuación hagamos las definiciones y teoremas relativo al polinomio minimal de T.

Definición.- Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. El polinomio minimal de T es el polinomio mónico generador (único) del ideal de polinomios sobre $I\!K$ que anulan a T.

El polinomio minimal $m(t)$ para el operador lineal T está unívocamente determinado por las siguientes tres propiedades:

1) $m(t)$ es un polinomio mónico sobre el cuerpo escalar $I\!K$.
2) $m(T) = 0$
3) Ningún polinomio sobre $I\!K$ que anule a T tiene grado menor que el de $m(t)$.

- Si A es una matriz $n \times n$ sobre $I\!K$, el polinomio minimal de A es el único polinomio mónico de grado mínimo sobre $I\!K$ que anula a la matriz A.

  Notamos que esta definición es similar al polinomio minimal del operador T.

  Si el operador T está representado en cierta base ordenada por la matriz A, entonces tiene el mismo polinomio minimal.

  Esto es porque $f(T)$ es un operador representado por la matriz $f(A)$, de modo que $f(T) = 0$ si, y solo si $f(A) = 0$

TEOREMA 3. Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n (o sea A es una matriz $n \times n$). El polinomio característico y el polinomio minimal de T (de A) tienen las mismas raíces, salvo multiplicidades.

Demostración:

Las hipótesis son:
h_1. $T: V \longrightarrow V$
h_2. $\dim V = n$
h_3. $p(x) = \det(T - xI)$ polinomio característico de T.
h_3. $m(x)$: polinomio minimal de T.

La tesis: $\underbrace{c \in I\!K \text{ es raíz de } P(x)}_{p(c)=0}$ s.s.s. $\underbrace{\text{lo es de } m(x)}_{m(c)=0}$

$\underbrace{\hspace{6em}}_{\exists\ v \neq 0,\ v \in V,\ \text{t.q. } (T - cI)\, v = 0}$

Veamos:

($\Leftarrow$) si $m(c) = 0$, debo probar que $\exists\ v \neq 0$, $v \in V$, tal que, $(T - cI)v = 0$. Esto indica que "c" es valor propio de T, lo que es equivalente decir que $\det(A - cI) = p(c) = 0$.

Pasos a seguir:

1. Supongamos que $m(c) = 0$.
   Entonces, por el Teorema del factor en polinomios, existe un polinomio $q(x) \in I\!K[x]$ tal que $m(x) = (x - c)\, q(x)$, $\text{gr}\, q(x) < \text{gr}\, m(x)$
   ↑ grado de $m(x)$

2. Ahora, analicemos en: $m(x) = (x - c)\, q(x)$
   teniendo en cuenta que: $m(T) = (T - cI)\, q(T)$ .... (2*)
   es, también, un operador porque T es un operador sobre V.

3. Porque $m(x)$ es el polinomio minimal, entonces $m(T) = 0$ y $q(T) \neq 0$,
   ($q(T)$ es un operador, $m(T)$ es el operador cero).

4. Porque $q(T) \neq 0$, elegimos un vector w tal $\underbrace{q(T)}_{\text{operador}}\, w \neq 0$

5. En ambos miembros de $0 = m(T)$ aplicar al vector w.

$$0w = m(T)w$$

$$0 = m(T)w \;,\; \text{pero } m(T) = (T - cI)\, q(T) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ por (2*)}$$

$$0 = (T - cI)\underbrace{q(T)w}_{v} \;,\; \text{hacer } \underbrace{q(T)w = v}_{\neq 0}$$

$$0 = (T - cI)v \;,\; v \neq 0$$

Esta última igualdad nos dice que c es valor propio de T, lo cual es equivalente afirmar que "c" es raíz del polinomio característico $P(x) = \det(A - cI)$ ■

($\Rightarrow$) $\underbrace{\text{Suponer que } p(c) = 0}_{\text{Es equivalente a suponer que } c \text{ es un valor propio de } T.}$, debo probar que $m(c) = 0$

1. Suponer que c es un valor propio de T, o sea que existe un vector $v \neq 0$ tal que $T(v) = c\, v$.

2. Por lema anterior, esto implica que $f(T)v = f(c)v$
   para cualquier polinomio f de $I\!K[x]$. En particular si elegimos el polinomio mínimo $m(x)$ se cumplirá: $m(T)\, v = m(c)v \quad v \neq 0$.

3. Pero $m(T) = 0$, entonces $m(c) = 0$ ■

TEOREMA 4. (Cayley – Hamilton)

Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita. Si p es el polinomio característico de T, entonces $p(T) = 0$; es decir, el polinomio minimal divide al polinomio característico de T.

Demostración:

Necesitamos recordar los siguientes conceptos:

a) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \;,\; i = j \\ 0 \;,\; j \neq j \end{cases}$

b) polinomio característico

c) propiedad de determinantes

d) $B \cdot \text{adj}(B) = |B|\, I$, $\text{adj}(B) = \widetilde{B}$

e) Inducción matemática.

Empezar la demostración:

1. Como la dimensión de V es finita, elegir una base ordenada $\{v_1, \ldots, v_n\}$ para V.

2. Sea A la matriz que representa a T en la base dada, entonces los elementos A_{ji} de la matriz A aparecen cuando cada vector $T(v_i)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$; así tendremos:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, v_j \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$T(v_i) - \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, v_j = 0$$

introducir la función $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \;,\; i = j \\ 0 \;,\; i \neq j \end{cases}$ dentro de T

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\delta_{ij} T - A_{ji} I)}_{B_{ij}}(v_j) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

3. $(\delta_{ij} T - A_{ji} I) = B_{ij}$ son los elementos de otra matriz cuadrada $n \times n$ que la llamaremos $B = [B_{ij}] \in I\!K^{n \times n}$.

4. Cuando $n=2$, obtenemos la siguiente matriz cuadrada 2×2:

$$B=\begin{bmatrix} T-A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T-A_{22}I \end{bmatrix}$$

y

$$\det B = (T-A_{11}I)(T-A_{22}I)-A_{12}A_{21}I$$
$$= T^2-(A_{11}+A_{22})T+(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})I$$

$$\boxed{\det B = p(T)}$$

↑ es un polinomio en T

donde $p(x)=x^2-(tr\ A)x+\det A$ es el polinomio característico de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} Tr\ A = A_{11}+A_{22} \\ \det A = A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12} \end{cases}$$

ya que $p(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix} x-A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & x-A_{22} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \delta_{11}x-A_{11} & \delta_{12}x-A_{12} \\ \delta_{21}x-A_{21} & \delta_{22}x-A_{22} \end{vmatrix}$$

donde los elementos de la matriz $xI-A$ son los polinomios

$$(xI-A)_{ij}=\delta_{ij}x-A_{ji} \qquad \begin{cases} \delta_{11}=1 \\ \delta_{12}=0 \\ \delta_{21}=0 \\ \delta_{22}=1 \end{cases}$$

5. Para $n>2$, también se cumple que $\det B = p(T)$ y todo lo hecho para $n=2$.

6. Se debe probar que $p(T)=0$ ⟵ *Operador cero*

Para que $p(T)$ sea el operador cero es necesario y suficiente probar que:

$$\boxed{(\det B)\,v_k = 0 \quad \text{para} \quad k=1,\ldots,n}$$

7. Por la definición de la matriz B dado en 3 y por (2*) los vectores $v_1,\ldots,v_n$ satisfacen las ecuaciones:

(7*) .... $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\,v_j = 0$, $1\le i\le n$

↳ hay "n" ecuaciones lineales.

8. Cuando $n=2$, el sistema de ecuaciones lineales dado en (7*), matricialmente, se puede escribir en la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T-A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T-A_{22}I \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. En este caso, la adjunta de la matriz B, es la matriz:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} T-A_{22}I & A_{21}I \\ A_{12}I & T-A_{11}I \end{bmatrix}$$

y $\quad \tilde{B}B=\begin{bmatrix} \det B & 0 \\ 0 & \det B \end{bmatrix}$

10. Teniendo en cuenta que:

$$(\det B)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\det B)\,v_1 \\ (\det B)\,v_2 \end{bmatrix} \text{ y que } \begin{bmatrix} \det B & 0 \\ 0 & \det B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\det B)\,v_1 \\ (\det B)\,v_2 \end{bmatrix}$$

se debe probar que: $\begin{bmatrix} (\det B)\,v_1 \\ (\det B)v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

esto es $(\det B)\,v_1=0$, $(\det B)\,v_2=0$ para v_1, v_2 que son vectores de la base $\{v_1, v_2\}$ de un espacio vectorial V de dimensión 2.

Veamos:

Por lo anterior, se puede hacer:

$$(\det B)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (\widetilde{B}B)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \widetilde{B}\underbrace{\left(B\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \widetilde{B}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\det B)\, v_1 \\ (\det B)\, v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\det B) v_1 = 0 \\ (\det B) v_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $p(T) = 0$, puesto que $(\det B) = p(T)$.

11. Generalizando:

a) Sea $\widetilde{B} = adj\ B$

b) Por (7*) obtenemos: $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}_{ki}\ B_{ij}\ v_j = 0$, para todo k, i

c) Sumar sobre i: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}_{ki}\ B_{ij}\ v_j = 0$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{ki}\ B_{ij}\right) v_j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ permutar la suma}$$

d) Pero $\widetilde{B}B = (\det B)\, I$, lo cual nos permite hacer: $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{ki}\ B_{ij} = \delta_{kj} \det B$

e) Por tanto: $\sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}\ (\det B)\, v_j = 0$

$$\Rightarrow \quad (\det B) v_k = 0 \quad , \quad 1 \le k \le n \qquad \textbf{lqqd.}$$

■

4. SUBESPACIOS INVARIANTES

Antes de hacer la definición de subespacio invariante, hacer el siguiente ejemplo:

Ejemplo 01. **Dado la matriz** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

a) Hallar los valores propios de A.
b) Hallar los vectores propios de A.
c) Hallar el operador T, **cuya matriz en la base canónica es** A.
d) Hallar los subespacios propios.

Solución:

a) Los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ con $trA = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\det A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

se hallan al resolver la ecuación cuadrática:

$$x^2 - (TrA)x + \det A = 0$$

$$x^2 + \tfrac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$2x + 3x - 2 = 0$$

$$(2x-1)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases} \text{ valores propios de } A.$$

b) Vectores propios.

i) **Asociado a** $x_1 = -2$

Resolver:

$$(A-(-2)I)U=0 \quad , \quad U=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} \quad , \quad 0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1/2 & 3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

se reduce a:

$$\boxed{\mu_1+3\mu_2=0}$$

$$\mu_1=-3\mu_2 \Rightarrow U=\begin{bmatrix}-3\mu_2\\ \mu_2\end{bmatrix}=\mu_2\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} \quad , \quad \mu_2\in I\!R$$

vector propio asociado a $x_1=-2$

ii) Asociado a $x_2=1/2$.

resolver:

$$\left(A-\tfrac{1}{2}I\right)V=0 \quad , \quad V=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \quad , \quad 0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

se reduce a:

$$\tfrac{1}{2}v_1-v_2=0$$

$$\boxed{v_1-2v_2=0}$$

$$v_1=2v_2 \Rightarrow V=\begin{bmatrix}2v_2\\ v_2\end{bmatrix}=v_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad , \quad v_2\in I\!R$$

vector propio asociado a $x_2=1/2$

c) Si A es la matriz que representa al operador T en la base canónica, entonces: $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ está definido por:

$$T(X)=AX \quad , \quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\in I\!R^2$$

$$T\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

o $\quad T(x_1,x_2)=\left(-x_1+3x_2\,,\,\tfrac{1}{2}x_1-\tfrac{1}{2}x_2\right)$

d) Los subespacios propios asociados a -2 y $\frac{1}{2}$, respectivamente, son:

i) $W_1=\{(\mu_1\,,\,\mu_2)/\mu_1+3\mu_2=0\}=gen\left\{t\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}, t\in I\!R\right\}$

ii) $W_2=\{(v_1\,,\,v_2)/v_1-2v_2=0\}=gen\left\{s\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, s\in I\!R\right\}$

e) Se cumplen: *i)* $T(W_1)\subset W_1$

ii) $T(W_2)\subset W_2$

Probar la inclusión *i)*

Antes, definamos el conjunto $T(W_1)$: $T(W_1)=\{y\in I\!R^2 / \exists\, x\in W_1 \,:\, y=T(x)\}$

- Si $x=(\mu_1,\mu_2)\in W_1 \Rightarrow \mu_1+3\mu_2=0$

  $\Rightarrow \mu_1=-3\mu_2$

  entonces: $x=(-3\mu_2\,,\,\mu_2)$

- Ahora, $T(x)=\left(-(-3\mu_2)+3\mu_2\,,\,\tfrac{1}{2}(-3\mu_2)-\tfrac{1}{2}\mu_2\right)$

  $\underbrace{T(x)}_{y}=(6\mu_2\,,\,-2\mu_2)$ .... (1)

- Si para todo vector $x=(-3\mu_2,\mu_2)\in W_1$ implica que $T(x)\in W_1$, habremos probado que $T(W_1)\subset W_1$.

Veamos:

En (1) se tiene: $\quad y=T(x)=(6\mu_2\,,\,-2\mu_2)=-2(-3\mu_2\,,\,\mu_2)\in W_1$

Ejemplo 02. Suponga que T: $V\rightarrow V$ es lineal.

a) el núcleo de T es invariante bajo T.

b) la imagen de T es invariante bajo T.

4.1 INVARIANCIA

Definición 5.- Sea $T: V \longrightarrow V$ el operador lineal sobre el espacio vectorial V.

Si W es un subespacio de V, se dice que W es **invariante** por T, si $T(W) \subset W$. Esto es, si para todo vector $v \in W$ el vector $T(v)$ está en W.

En tal caso, T induce un operador lineal $\hat{T}: W \longrightarrow W$ definido por $\hat{T}(w) = T(w)$ para todo $w \in W$.

Ejemplo 03. En el ejemplo 1, tenemos que $T(W_1) \subset W_1$, entonces W_1 es invariante por T. Pero también se cumple: $T(W_2) \subset W_2$, entonces W_2 es invariante por T.

Cuando V es de dimensión finita, la invariancia de W por T tiene una interpretación matricial simple, muy interesante que la mencionamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 5. Supongamos que W es un subespacio invariante de $T: V \longrightarrow V$.

Entonces T tiene una representación matricial por bloques $\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$,

donde B es una representación matricial de restricción $\hat{T}$ de T en W.

Demostración:

1. Supongamos que el conjunto de vectores $B' = \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ordenada de W ($r = \dim W$).
2. Si la dim $V = n$, $n > r$, extender la base B' a una base $B = \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$ de V, $r + s = n$
3. Entonces las imágenes $\hat{T}(w_1), \dots, \hat{T}(w_r), T(v_1), \dots, T(v_s)$ podemos expresarlas como combinación lineal de los vector de B.

Así tendremos:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(w_1) &= T(w_1) = b_{11} w_1 + b_{21} w_2 + \dots + b_{r1} w_r + \mathbf{O} v_1 + \mathbf{O} v_2 + \dots + \mathbf{O} v_s \\
\hat{T}(w_2) &= T(w_2) = b_{12} w_1 + b_{22} w_2 + \dots + b_{r2} w_r + \mathbf{O} v_1 + \mathbf{O} v_2 + \dots + \mathbf{O} v_s \\
&\vdots \\
\hat{T}(w_r) &= T(w_r) = b_{1r} w_1 + b_{2r} w_2 + \dots + b_{rr} w_r + \mathbf{O} v_1 + \mathbf{O} v_2 + \dots + \mathbf{O} v_s \\
T(v_1) &= c_{11} w_1 \quad c_{21} w_2 + \dots + c_{r1} w_r + d_{11} v_1 + d_{21} v_2 + \dots + d_{s1} v_s \\
T(v_2) &= c_{12} w_1 \quad c_{22} w_2 + \dots + c_{r2} w_r + d_{12} v_1 + d_{22} v_2 + \dots + d_{s2} v_s \\
&\vdots \\
T(v_s) &= c_{1s} w_1 \quad c_{2s} w_2 + \dots + c_{rs} w_r + d_{1s} v_1 + d_{2s} v_2 + \dots + d_{ss} v_s
\end{aligned}
$$

La matriz de T en la base B es:

$$
A = [T]_B = \begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\
b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} & c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rs} \\
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & d_{s1} & d_{s2} & \dots & d_{ss}
\end{bmatrix}
$$

$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$, **donde B es la matriz de $\hat{T}$ relativa a la base $\{w_i\}$ de W. $B_{r\times r}$, $C_{r\times(n-r)}$, $D_{(n-r)\times(n-r)}$**

lqqd.

> **NOTA ✍**
> **En el siguiente lema necesitamos:**
> 1. **denotar el operador $\hat{T}$ por T_w.**
> 2. **El ejemplo 2, nos ilustra que:**
>   a) **El polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de B y D.**
>   b) **El polinomio minimal de la matriz A, es el mínimo común múltiplo de los polinomios característicos de las matrices B y D.**

Ejemplo 04. Dado la matriz $A=\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ se tiene:

a) El polinomio característico $P(\lambda)=(\lambda-6)^2\,(\lambda-12)$

b) El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2=6$, es: $S_{\lambda_2=2}=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

c) El subespacio propio asociado al valor propio a $\lambda_1=12$, es: $S_{\lambda_1=12}=gen\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

Se ha obtenido dos subespacios invariantes: $W_1=S_{\lambda_1}$; $W_2=S_{\lambda_2}$.

d) Como $W_1=S_{\lambda_1=12}$ es un subespacio invariante de $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, hallar la representación matricial por bloques de T.

e) Como $W_2=S_{\lambda_2=6}$ es otro subespacio invariante de $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, hallar la representación matricial por bloques de T.

Solución de d) Se pide hallar una matriz de la forma $\begin{bmatrix} B & C \\ O & D\end{bmatrix}$, donde B es una representación matricial de la restricción $\hat{T}$ de T en W_1.

Veamos:

- Una base de W_1 es $B'=\{(-1,1,2)\}$, para $\lambda_1=12$.
- Agregando los vectores $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ ampliamos la base B' a otra base $B=\{\underbrace{(-1,1,2)}_{w_1},\underbrace{(0,1,0)}_{v_1},\underbrace{(0,0,1)}_{v_2}\}$ de $V=\mathbb{R}^3$
- Hallemos la regla de correspondencia de T en la base canónica:

$$T(X)=AX \quad , \quad X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$T(x,y,z)=(7x-y-2z\,,\,-x+7y+2z\,,\,-2x+2y+10z)$$

- Ahora, aplicar el teorema:

$$\hat{T}(w_1)=T(w_1)=T(-1,1,2)=(-7-1-4\;,\;1+7+4\;,\;2+2+20)=(-12\,,12\,,24)$$

$$T(v_1)=T(0,1,0)\;=(-1,7,2)$$

$$T(v_2)=T(0,0,1)\;=(-2,2,10)$$

Ahora, hacer el siguiente sistema:

$$\begin{cases}(-12\,,12\,,24)=b_{11}(-1,1,2)\;+\;0\,(0,1,0)\;+\;0\,(0,0,1)\\ (-1\,,7\,,2)\;=c_{11}(-1,1,2)\;+\;d_{11}(0,1,0)\;+\;d_{21}\,(0,0,1)\Rightarrow\\ (-2\,,2\,,10)\;=c_{12}(-1,1,2)\;+\;d_{12}(0,1,0)\;+\;d_{22}\,(0,0,1)\end{cases}\begin{bmatrix} b_{11} & c_{11} & c_{12}\\ 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$$

Resolviendo cada ecuación se obtienen: $b_{11}=12$, $c_{11}=1$, $c_{12}=2$, $d_{11}=6$, $d_{12}=0$, $d_{21}=0$, $d_{22}=6$.

Así tendremos:

$$\begin{aligned}(-12,12,24)&=12(-1,1,2)\;+\;0(0,1,0)+0(0,0,1)\\(-1,7,2)&=\;1(-1,1,2)\;\;+\;6(0,1,0)+0(0,0,1)\\(-2,2,10)&=\;2(-1,1,2)\;\;+\;0(0,1,0)+6(0,0,1)\end{aligned}$$

La matriz en bloques es:

$$A=\left[\begin{array}{c|cc} 12 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6\end{array}\right] \quad \text{donde} \quad B=[12]_{1\times1} \quad C=[1\;\;2]_{1\times2}$$

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}_{2\times1} \qquad D=\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}_{2\times2}$$

NOTA ✍ Las potencias enteras de A son:

$$A^2=\left[\begin{array}{c|cc} 12^2 & 18 & 36 \\ \hline 0 & 6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6^2\end{array}\right],\quad A^3=\left[\begin{array}{c|cc} 12^3 & 252 & 504 \\ \hline 0 & 6^3 & 0 \\ 0 & 0 & 6^3\end{array}\right],\quad A^k=\begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k\end{bmatrix}$$

- El polinomio característico de B es $p_1(x)=(x-12)$
- El polinomio característico de la matriz D es $p_2(x)=(x-6)(x-6)=(x-6)^3$
- El polinomio característico de $A=p_1(x)\;p_2(x)=(x-12)\,(x-6)^2$
- El polinomio minimal de A es $m(t)=(x-12)\;(x-6)^2$.

Solución de e)

Se pide hallar una matriz de la forma $\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$, donde B es una representación matricial de la restricción $\hat{T}$ de T en $W_1 = S_{\lambda_1=6}$.

Veamos:

- Una base de $S_{\lambda_2=6}$ es $B' = \{(1,1,0),(2,0,1)\}$
- Agregar en B' el vector (0,0,1): $B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{w_1}, \underbrace{(2,0,1)}_{w_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{v_1}\}$

así, la base B' se ha ampliado a la base B de $V = IR^3$.

- A continuación, hallemos las imágenes de w_1, w_2 y v_1 mediante T, donde $T(x,y,z) = (7x - y - 2z, -x + 7y + 2z, -2x + 2y + 10z)$

$$\hat{T}(w_1) = T(w_1) = (7-1, -1+7, -2+2) = (6,6,0)$$
$$\hat{T}(w_2) = T(w_2) = (14-2, -2+2, -4+10) = (12,0,6) \quad (*)$$
$$T(v_1) = (-2,2,10)$$

- Ahora, cada vector de (*), expresarlo como combinación lineal de los vectores de B:

$$(6,6,0) = \overset{6}{b_{11}}(1,1,0) + \overset{\mathbf{O}}{b_{21}}(2,0,1) + O\,v_1$$

$$(12,0,6) = \overset{\mathbf{O}}{b_{12}}(1,1,0) + \overset{6}{b_{22}}(2,0,1) + O\,v_1 \qquad [T]_B = \left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & c_{11} \\ b_{21} & b_{22} & c_{21} \\ \hline 0 & 0 & d_{11} \end{array}\right]$$

$$(-2,2,10) = \underset{2}{c_{11}}(1,1,0) + \underset{-2}{c_{21}}(2,0,1) + \underset{12}{d_{11}}(0,0,1)$$

Al resolver cada una de estas ecuaciones se obtiene:

$b_{11} = 6$, $b_{21} = 0$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = 6$, $c_{11} = 2$, $c_{22} = -2$, $d_{11} = 12$

- La matriz en bloques es:

$$[T]_B = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 12 \end{array}\right] \quad \text{donde } B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$O = [0 \quad 0], \quad D = [\,12\,]$$

- Donde $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ es la matriz de $\hat{T}$ relativa de la base $B' = \{(1,1,0),(2,0,1)\}$ de $W_2 = S_{\lambda_2=6}$.
- El polinomio característico para el operador restricción $\hat{T}$ se obtiene de la matriz B, y es $P_1(x) = (x-6)^2$.
- El polinomio minimal de $\hat{T}$ es $m_1(x) = x - 6$

El lema que a continuación enunciamos confirmará lo expuesto en el ejemplo 4, solo que la notación $\hat{T}$ la cambiaremos por T_W para referirnos al operador T restringido al subespacio propio W, donde B es la matriz que la representa.

LEMA 4. Sea W un subespacio invariante por T. El polinomio característico para el operador restricción T_W divide el polinomio característico de T. El polinomio minimal de T_W divide al polinomio minimal de T.

1. Por el Teorema anterior: si W es un subespacio invariante por T, entonces la matriz que representa a T es: $A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$; donde: $A = [T]_B$ y $B = [T_W]_{B'}$

   ($[T]_B$: matriz de T en la base B; $[T_W]_{B'}$: Matriz de T_W en la base B')

2. Porque la matriz A está expresado en forma de bloques, se cumple que:

   Polinomio característico de A = (polinomio característico de B) × (Polinomio característico de D)

   $$\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$$
   $$p(x) = p_1(x)\,p_2(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2*)$$

3. La igualdad en (2*) nos muestra que $p_1(x)$ divide a $p(x)$.

4. La k-ésima potencia de la matriz A tiene la forma bloque $A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$, C_k es una matriz $r \times (n-r)$.

5. Deducimos:

(Polinomio característico de A^k) = (polinomio característico de B^k) × (polinomio característico de D^k)

Entonces, cualquier polinomio que anule a A también anula a B (y también a D). Así, el polinomio minimal de B divide al polinomio minimal de A. ∎

El T-conductor de v en W

Antes de hacer la definición correspondiente a este tema, hagamos un ejemplo aclaratorio.

Ejemplo 05. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ → $\operatorname{tr} A = 4$, $\det A = 3 - 8 = -5$

a) El polinomio característico de la matriz A es:
$$P(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

b) Los valores propios de la matriz A son: $x_1 = 5$ $x_2 = -1$

c) Los vectores propios asociados a $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$ se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones homogéneas.

Vector propio asociado a $x_1 = 5$

Resolver: $(A - 5I)U = 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se reduce a: $2\mu_1 - 2\mu_2 = 0$

$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow U = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $x_1 = 5$, es:

$$W_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}$$

└ Es una recta en $I\!R^2$ que pasa por el origen y (1,1) es el vector director.

Vector propio asociado a $x_2 = -1$

Resolver: $(A + I)V = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se reduce a: $2v_1 + 4v_2 = 0$

$$v_1 = -2v_2 \Rightarrow V = \begin{bmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$V = -v_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $x_2 = -1$, es:

$$W_2 = \left\{ s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} : s \in I\!R \right\}$$

└ Es una recta en $I\!R^2$ que pasa por el origen y (2,−1) es el vector director.

d) El polinomio característico está expresado como el producto de dos factores lineales:

$$P(x) = \underbrace{(x-5)}_{g(x)}\underbrace{(x+1)}_{h(x)}$$

i) Eligiendo el polinomio lineal $g(x) = x - 5$ se obtienen:

- El operador $g(T) = T - 5I$
- La matriz $g(A) = A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Eligiendo cualquier vector $\alpha \in I\!R^2$ se cumple la siguiente propiedad:

$g(T)\alpha$ está en $W_2 = \left\{ s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, s \in I\!R \right\}$

esta propiedad nos indicará que:

"el T-conductor de α en W_2 es el polinomio mónico $g(x) = x - 5$"

ii) Eligiendo el polinomio lineal $h(x) = x + 1$ se obtienen:

- El operador $h(T) = T + I$
- La matriz $h(A) = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Eligiendo cualquier vector $\alpha \in I\!R^2$ se cumple la siguiente propiedad:

$h(T)\alpha$ está en $W_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in I\!R \right\}$

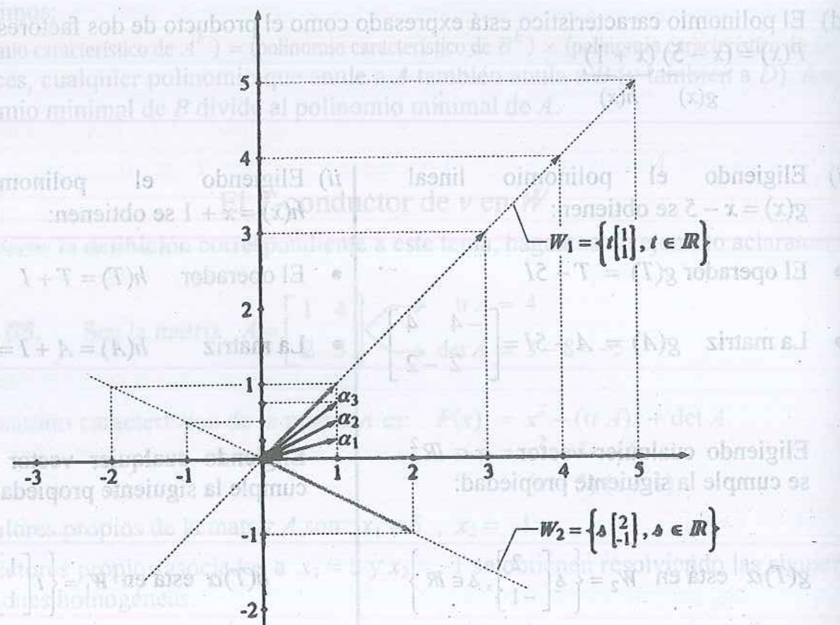
esta propiedad nos indicará que:

"el T-conductor de α en W_1 es el polinomio mónico $h(x) = x + 1$"

COMPROBACIÓN

1. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow g(T)\alpha_1 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
2. $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow g(T)\alpha_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
3. $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow g(T)\alpha_3 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

1. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow h(T)\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow h(T)\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow h(T)\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Cuando α_1, α_2, α_3 se alejan radialmente del vector $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, la longitud del vector $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ se "*acortan*" en sentido opuesto.

- **El polinomio $g(x) = x - 5$ es el generador del ideal de polinomios siguiente:**

  $S_T(\alpha\,;W_2) = \{(x-5)q(x)/q(x) \in IK[x]\}$

Cuando α_1, α_2, α_3 se acercan radialmente al vector $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, la longitud del vector $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ se "*agrandan*".

Esto porque el polinomio $h(x) = x+1$ conduce suavemente cada vector $\alpha \in IR^2$ hacia W_1.

- **El polinomio $h(x) = x + 1$ es el generador del ideal de polinomios siguiente:**

  $S_T(\alpha\,;W_1) = \{(x+1)q(x)/q(x) \in IK[x]\}$

El T-conductor de v en W

Definición.- Sea W un subespacio invariante para T, y sea v un vector de V. El T-conductor de v en W. es el conjunto de todos los polinomios g (sobre IK) tales que $g(T)v$ está en W.

NOTACIÓN.- Vamos a denotar por $S_T(v\,;W)$ al "T-conductor de v en W"

$$S_T(v\,;W) = \{g \in IK[x] \,/\, g(T)\,v \in W\}$$

Es un ideal de polinomios, generado por un polinomio mónico lineal que es factor del polinomio característico.

en esta definición, tener en cuenta que: $v \notin W$

$v \in V$, $g(T)v \in W$ porque $T(W) \subset W$

Por definición: $g \in S_T(v,W) \iff g(T)\,v \in W$, $g \in IK[x]$

Ejemplo 06.

- En el ejemplo 4 se tiene el operador lineal $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ definido por $T(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$, cuya matriz en la base canónica es $A = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$
- El polinomio característico de A es $P(x) = (x-5)(x+1)$
- El polinomio minimal de A es $m(x) = (x-5)(x+1)$
- El subespacio propio de $V = IR^2$ asociado al valor propio $x = 5$ es $W_1 = \left\{t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}; t \in IR\right\} \Longleftarrow$ es una recta en IR^2 que pasa por (0,0).
- El subespacio propio de $V = IR^2$ asociado al valor propio $x = -1$ es $W_2 = \left\{s\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}; s \in IR\right\} \Longleftarrow$ es una recta en IR^2 que pasa por (0,0)
- $g(x) = x - 5$ es un factor de $p(x)$.
- $g(T) = T - 5I$ es un operador lineal $g(T): IR^2 \longrightarrow IR^2$
- $g(A) = A - 5I$ es una matriz asociada al operador $g(T)$ en la base canónica.
- $S_T(\alpha, W_2) = \{(x-5)q(x) : q(x) \in IK[x]\}$ es el T-conductor de un vector $\alpha \in IR^2$ en W_2.

Ejemplo 07. Sea $T: V \longrightarrow V$, $V = \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T(x,y,z) = (2x+2y-5z, 3x+7y-15z, x+2y-4z)$$

La matriz de T en la base canónica $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ es

$$A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es $f(x) = (x-1)^2(x-3)$

El polinomio mininal es:

$$m(x) = (x-1)(x-3)$$

Se obtiene

$g(x) = x - 1$

El operador lineal: $g(T) = T - I$

La matriz $A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

El subespacio invariante $W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$g(x) = x - 1$ es el T-conductor de un vector de $\alpha \in V$ en W_2.

comprobar con $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que $g(T)\alpha \in W_2$

Se obtiene

$h(x) = x - 3$

El operador lineal: $h(T) = T - 3I$

La matriz $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

El subespacio invariante $W_2 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$h(x) = x - 3$ es el T-conductor de un vector de $\alpha \in V$ en W_1.

comprobar con $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que $h(T)\alpha \in W_1$

Porque existen tres vectores propios de T, el conjunto $\beta = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ forma una base de $V = \mathbb{R}^3$ y por lo tanto la matriz A es **DIAGONALIZABLE.**

LEMA 5. Si W es un espacio invariante para T, entonces W es invariante por todo polinomio de T. Así, pues, para todo v de V, el conductor $S(v;V)$ es un ideal en el álgebra de polinomios $\mathbb{K}[x]$.

Demostración:

HIPÓTESIS: $T(W) \subset W$ (esta inclusión implica $T(v) \in W$, $\forall v \in W$)

TESIS: Debo probar la validez de dos enunciados:

a) W es invariante por todo polinomio de T, esto es, si $f(T)$ es un polinomio en T, entonces $f(T)v \in W$, $\forall v \in W$

b) $S(v;W)$ es un ideal en $\mathbb{K}[x]$. Esto es, al fijar un elemento $g \in S(v;W)$ y elegir el polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$, entonces $fg \in S(v;W)$.

Prueba de a):

1) Por hipótesis, se tiene $T(W) \subset W$

Esto es $Tv \in W$, para todo $v \in W$

Además:

$$T(Tv) = T^2 v \in W$$

$$T(T^2 v) = T^3 v \in W$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$T(T^{k-1}v) = T^k v \in W$$

2) Sumar: $(Tv + T^2v + \cdots\cdots + T^k v) \in W$, porque W es subespacio de V.

$$\underbrace{(T + T^2 + \cdots\cdots + T^k)}_{f(T)} v \in W$$

$\Rightarrow f(T)v \in W$, para todo polinomio $f(x) = x + x^2 + \cdots\cdots + x^k$

Prueba de b):

3) Si W es un subespacio de V, entonces $S(v;W)$ es un subespacio de $\mathbb{K}[x]$, porque cumple: $(cf + g)(T) = cf(T) + g(T)$; $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$

Pues:

i) $cf(T)v \in W$; $g(T)v \in W$

ii) $f(x) \in I\!K[x]$; $cf(x) \in I\!K[x]$; $g(x) \in I\!K[x]$

4) Si W es invariante por T (esto es $T(W) \subset W$), sea $g(x) \in S(v;W)$ entonces $g(T)v \in W$.

Al elegir el polinomio $f(x) \in I\!K[x]$, se cumple que $f(T)\underbrace{[g(T)v]}_{\text{es un elemento de } W} \in W$

Esto prueba, que $S(v;W)$ es un ideal en el álgebra de polinomios de $I\!K[x]$.

Observaciones:

1.- Un ideal de polinomio en $I\!K[x]$ tiene un generador y por tanto el ideal $S(v;W) = \{g \in I\!K[x] / g(T)v \in W\}$ tiene un generador mónico único.

2.- El *T*-conductor de *v* en *W* es el polinomio mónico "*g*" de menor grado tal que $g(T)v$ está en *W*.

3.- Un polinomio *f* está en $S(v;W)$ si, y solo si, *g* divide a *f* .

4.- El conductor $S(v;W)$ siempre contiene el polinomio minimal de *T*. Luego cada *T*-conductor divide al polinomial minimal.

5. TRIANGULACIÓN DE UN OPERADOR

Introducción.- La triangulación de una matriz es un proceso algebraico que merece especial atención, porque depende de la obtención de una base ordenada del operador lineal $T:V \longrightarrow V$.

Es necesario responder a las preguntas: ¿cuándo dos matrices son semejantes? ¿cuándo una matriz es triangulable?

Definición 6. Dos matrices $A, B \in I\!K^{n\times n}$ son semejantes si existe una matriz inversible *P* tal que $B = P^{-1}AP$

De manera similar: el operador $T:V \longrightarrow V$ es semejante al operador $L:V \longrightarrow V$ si existe un isomorfismo $S:V \longrightarrow V$ tal que $L = S^{-1}TS$.

Definición 7. Una matriz $A \in I\!K^{n\times n}$ es triangulable si es semejante a una matriz triangular superior. Esto es:

A es triangulable, si $A \sim B$, *B* es matriz triangular.

└─se lee "*A* es semejante a *B*"

$$A \sim B \iff \exists\, P \in I\!K^{n\times n} \text{ tal que } B = P^{-1}AP$$

Definición 8. El operador $T:V \longrightarrow V$ se llama triangulable, si existe una base ordenada en la cual *T* está representada por una matriz triangular.

Antes de hacer las demostraciones del Lema 3 y del Teorema 5, hagamos un ejemplo aclaratorio.

Ejemplo 08 Sea el operador lineal $T:V \longrightarrow V$, $V = I\!R^3$, definido por:

$$T(x,y,z) = (-3x+y-z, -7x+5y-z, -6x+6y-2z)$$

donde $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ es una matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$

Se pide triangular la matriz *A*.

Solución:

Pensando en la definición 3, debemos hallar una base ordenada de *V*, llamémosla $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, en la cual *T* está representada por una matriz triangular. Esto es:

$$\begin{cases} Tv_1 = a_{11}\, v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)} \\ Tv_2 = a_{12}\, v_1 + a_{22}\, v_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)} \\ Tv_3 = a_{13}\, v_1 + a_{23}\, v_2 + a_{33}\, v_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)} \end{cases}$$

donde $[T]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ es la representación triangular de *T*. Los números a_{11} , a_{22} , a_{33} son valores propios de la matriz *A*. Para abreviar las operaciones algebraicas, hacer en (I), (II) y (III) las siguientes sustituciones: $a_{11} = \alpha$, $a_{12} = a$, $a_{22} = \beta$, $a_{13} = b$, $a_{23} = c$, $a_{33} = \delta$.

Así tendremos:

$$(1)\begin{cases} Tv_1 = \alpha v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (I) \\ Tv_2 = a v_1 + \beta v_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (II) \\ Tv_3 = b v_1 + c v_2 + \delta v_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (III) \end{cases}$$

Debemos hallar: 1°. el escalar α ; 2° el vector v_1, 3° el vector v_2, 4° el vector v_3, 5° los escalares a y β, 6° los escalares c, b, δ.

Veamos:

Paso 1. Hallar α

Para ello, resolver la ecuación (I) teniendo en cuenta que $v_1 = (x,y,z)$.

$$Tv_1 = \alpha v_1$$

$$(-3x+y-z, -7x+5y-z, -6x+6y-2z) = \alpha(x,y,z)$$

$$\begin{cases} -3x+y-z = \alpha x \\ -7x+5y-z = \alpha y \\ -6x+6y-2z = \alpha z \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} (-3-\alpha)x + y - z = 0 \\ -7x + (5-\alpha)y - z = 0 \\ -6x + 6y + (-2-\alpha)z = 0 \end{cases}$$

El sistema (2) tiene solución no trivial si su determinante es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} -3-\alpha & 1 & -1 \\ -7 & 5-\alpha & -1 \\ -6 & 6 & -2-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$(\alpha-4)(\alpha+2)^2 = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Paso 2. *i)* Con $\alpha = 4$, resolver el sistema homogéneo (2):

$$\begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ -7x + y - z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \end{cases}$$

se reduce a $\begin{cases} -6x = 0 \longrightarrow x = 0 \\ -6x + y - 6z = 0 \longrightarrow y = z \end{cases}$

Entonces el vector solución es $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$, $z \in IR$

ii) Con $\alpha = -2$, resolver el sistema homogéneo (2):

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -7x + 7y - z = 0 \\ -6x + 6y - 0 = 0 \end{cases}$$

Se reduce a: $\begin{cases} -x + y - z = 0 \longrightarrow y = x \\ 6z = 0 \longrightarrow z = 0 \end{cases}$

Entonces el vector solución es: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}$

¿Cómo hallar el tercer vector v_3?

iii) Con la raíz repetida $\alpha = -2$ se resuelva la ecuación

$(T - \alpha I)v_3 = v_2$, para hallar $v_3 = (x,y,z)$

$(T + 2I)v_3 = v_2$

$Tv_3 + 2Iv_3 = v_2$, $Iv_3 = v_3$, $v_3 = (x,y,z)$

$Tv_3 + 2v_3 = v_2$

$$(-3x+y-z, -7x+5y-z, -6x+6y-2z) + 2(x,y,z) = (1,1,0)$$

$$(-x+y-z, -7x+7y-z, -6x+6y) = (1,1,0)$$

$$(-6)\ (-7) \quad \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -7x + 7y - z = 1 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y-z = 1 \\ 0+0+6z = -6 \\ 0+0+6z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y-z = 1 \\ \boxed{z = -1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y+1 = 1 \\ -x+y \quad = 0 \\ \boxed{y = x} \end{cases}$$

Luego, el vector solución es: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ -1 \end{bmatrix}_{\text{para } x=0} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$.

Paso 3. La base obtenida es $\beta = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$

Paso 4. La base β es la que va **TRIANGULAR** a T.
Para ello, se vuelve al sistema (1) con el fin de hallar los escalares: a, β, b, c, δ

$$(2) \quad \begin{cases} Tv_1 = 4v_1 \\ Tv_2 = a v_1 + \beta v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)} \\ Tv_3 = b v_1 + c v_2 + \delta v_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Resolver (II) y (III): Sabiendo que

$$T(x,y,z) = (-3x+y-z, -7x+5y-z, -6x+6y-2z)$$

Para $v_2 = (1,1,0)$ obtenemos $Tv_1 = (-3+1, -7+5, -6+6) = (-2,-2,0)$

Para $v_3 = (0,0,1)$ obtenemos $Tv_3 = (-1,-1,-2)$

Resolver (II): $(-2,-2,0) = a(0,1,1) + \beta(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \beta = -2 \end{cases}$

Resolver (III): $(-1,-1,-2) = b(0,1,1) + c(1,1,0) + \delta(0,0,1)$

$(-1,-1,-2) = (c, b+c, b+\delta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = c \\ -1 = b+c \rightarrow b = 0 \\ -2 = b+\delta \rightarrow \delta = -2 \end{cases}$$

Conclusión.- El sistema (2) es:

$$\begin{cases} Tv_1 = 4v_1 \\ Tv_2 = 0v_1 - 2v_2 \\ Tv_3 = 0v_1 - v_2 - 2v_3 \end{cases}$$

La matriz triangular de T en la base β es $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

OTRO MÉTODO:

Si pensamos en la definición 2, debemos hallar una matriz no singular P, tal que $B = P^{-1}AP$ es matriz triangular. Las columnas de la matriz P son los vectores propios de la matriz A.

Pasos a seguir para hallar la matriz P.

Paso 1. Hallar
a) El polinomio característico de la matriz A,
b) Los valores propios, y
c) Los vectores propios.

a) El polinomio característico de A es $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
$= (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$

b) Los valores propios de A son: $\lambda = 4$, $\lambda = -2$

c) Vectores propios de A.

i) El vector propio U, asociado a $\lambda=4$, se halla resolviendo el sistema homogéneo $(A-4I)U=\mathbf{0}$, $U=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Se obtiene $U=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

ii) El vector propio V asociado a $\lambda=-2$, se halla resolviendo el sistema homogéneo $(A+2I)V=0$, $V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$. Se obtiene $V=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

iii) El conjunto de los vectores propios de A es $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ y no forma una base de $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, ¿qué hacer? Lo práctico es agregar el vector canónico $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ con el fin de formar la base $B=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Paso 2. La matriz P es $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$

Paso 3. La matriz triangular es: $[T]_B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

Observación: Si usted halla otra base ordenada diferente a la base B, obviamente la matriz triangular será otra.

- En términos de los operadores lineales L, S y T debe ser:

T es semejante a $L \Longleftrightarrow \exists$ un isomorfismo $S: V \longrightarrow V$ tal que $L=S^{-1}\circ T\circ S$, donde:

$L:V\longrightarrow V$ esta definido por $L(x,y,z)=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$=(4x,-2y-z,-2z)$

$S:V\longrightarrow V$ esta definido por $S(x,y,z)=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$=(y,x+y,x+z)$

$S^{-1}:V\longrightarrow V$ esta definido por $S^{-1}(x,y,z)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$=(-x+y,x,x-y+z)$

Algunas aclaraciones:

Cuando se tiene el operador lineal $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z)=(-3x+y-z,-7x+5y-z,-6x+6y-2z)$$

hemos obtenido lo siguiente:

1. La matriz de T en la base canónica $\mathcal{C}=\{e_1,e_2,e_3\}$ es

$$[T]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{bmatrix}$$

donde: $\begin{cases}Te_1=-3e_1-7e_2-6e_3\\ Te_2=\quad e_1+5e_2+6e_3\\ Te_3=-e_1-\ e_2-2e_3\end{cases}$

2. La matriz de T en la base ordenada $\beta=\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}},\underset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}},\underset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}\right\}$ es $[T]_\beta=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$\text{donde} \begin{cases} Tv_1 = 4v_1 \\ Tv_2 = 0\,v_1 - 2v_2 \\ Tv_3 = 0v_1 - v_2 - 2v_3 \end{cases}$$

3. $W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ y $W_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ son los subespacios propios de V.

4. El polinomio minimal es:

$$m(x) = (x-4)\,(x+2)^2$$

$(x-4)$ es un operador $\rightarrow T-4I$; $(x+2)$ es un operador $\rightarrow T+2I$

LEMA 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$.

Sea T un operador lineal sobre $V(T: V \longrightarrow V)$ tal que el polinomio minimal de T sea un producto de factores lineales.

$$m(x) = (x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_j)^{r_j} \ldots (x-c_k)^{r_k}, \; c_i \in I\!K$$

Sea W un subespacio propio de V $(W \neq V)$ invariante por T. Existe un vector v tal que:

a) v no pertenece a W

b) $(T - c\,I)v$ está en W, para algún valor propio c del operador T.

Demostración.-

- Lo que dice (a) y (b) es que el T-conductor de v en W es un polinomio lineal.
- Eligiendo $(x-c_j)$ se debe probar que:

Si $v \in V$, tal que $v \notin W$ entonces $(T - c_j\,I)v \in W$

$$v = h(T)\beta \qquad [(T-c_j\,I)\,h(T)]\beta$$

donde $(T-c_j I)h(T) = g(T)$ y $[(T-c_j I)h(T)]\beta = g(T)\beta$.

Veamos:

1. Hacer dos supuestos:

h_1. Sea β un vector cualquiera de V, tal que $\beta \notin W$.

h_2. Sea g el T-conductor de β en W (esto es, $g(T)\beta \in W$)

2. Por el supuesto h_2, g es un polinomio que divide a $m(x)$, que es el polinomio minimal de T. Como $\beta \notin W$, entonces el polinomio g no es constante y podemos suponer que g tiene la forma: $g(x) = (x-c_1)^{e_1} \ldots (x-c_j)^{e_j} \ldots (x-c_k)^{e_k}$.

donde al menos uno de los enteros e_j es positivo (porque si todos los e_j son cero, entonces g sería una constante, lo cual no se desea).

3. Como hemos elegido el polinomio lineal $(x-c_j)$, se tiene que $(x-c_j)$ divide a g, entonces existe un polinomio $h(x) \in I\!K[x]$, tal que,

$$g(x) = (x-c_j)\,h(x)$$

donde $\qquad g(T) = (T - c_j I)\,h(T)$ es un operador

4. Por el supuesto h_2 y por la definición de g, el vector $v = h(T)\beta \notin W$. Pero

$$\underbrace{[(T-c_j I)\,h(T)]}_{g(T)}\beta \in W$$

■

TEOREMA 6. Sea V un espacio de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ y sea T un operador lineal sobre V $(T: V \longrightarrow V)$. Entonces T es triangulable si, y solo si, el polinomio minimal de T es producto de polinomios lineales sobre $I\!K$.

Demostración.

($\Leftarrow$) Si el polinomio minimal es $m(x) = (x-c_1)^{r_1} \ldots (x-c_k)^{r_k}$, se debe probar que T es triangulable.

Esto es, se debe probar que existe una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ que triangula a T.

Para ello, apliquemos en forma sucesiva el Lema 6.

Comencemos aplicando el Lema 6 al subespacio $W_0 = \{0\}$: existe un vector, no nulo, $v_1 \in V$ tal que $v_1 \notin W_0$ y además $(T - c_1\,I)v_1 = 0 \Longleftrightarrow T\,v_1 = c_1\,v_1$ ……… (1)

Por la ecuación (1) obtenemos el subespacio $W_1 = gen\{v_1\}$. Aplicar el Lema 6 al subespacio W_1: existe un vector $v_2 \in V$, tal que $v_2 \notin W_1$ y además.

$$(T - c_2 I)v_2 = a_{12} v_1 \iff Tv_2 = a_{12} v_1 + c_2 v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por la ecuación (2) obtenemos el subespacio $W_2 = gen\{v_1, v_2\}$. Aplicar el Lema 6 al subespacio W_2: existe un vector $v_3 \in V$ tal que $v_3 \notin W_2$ y además.

$$(T - c_3 I)v_3 = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 \Rightarrow Tv_3 = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + c_3 v_3$$

De manera similar se continua para obtener una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ del subespacio W_j, $1 \le j \le n$. Escribiendo el sistema de ecuaciones formado por (1), (2), (3), … , (*j*), … (*n*); obtenemos:

$$\begin{aligned} Tv_1 &= c_1 v_1 \\ Tv_2 &= a_{12} v_1 + c_2 v_2 \\ Tv_3 &= a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + c_3 v_3 \\ &\vdots \\ Tv_j &= a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + a_{3j} v_3 + \ldots\ldots + c_j v_j \\ &\vdots \\ Tv_n &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + a_{3n} v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n v_n \end{aligned}$$

Así hemos obtenido una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de *V* en el cual la matriz que representa *T* es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Como observamos, $[T]_B$ es una matriz triangular superior en la base *B*, donde los número reales c_j son los valores propios, alguno de los cuales se repite d_j veces.

($\Rightarrow$) Si *T* es triangulable, entonces el polinomio minimal de *T* es producto de polinomios lineales sobre $I\!K$.

Demostración:

Si *T* es triangulable, es evidente que el polinomio característico de la matriz triangular $[T]_B$ es:

$$P(x) = (x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_j)^{d_k}, \quad c_j \in I\!K$$

Los elementos de la diagonal $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los valores propios, con c_j repetidos d_j veces. Pero si *P* puede ser así factorizado, entonces el polinomio minimal *m* también puede ser de la forma $m(x) = (x - c_1)^{r_1} \ldots (x - c_k)^{r_k}$ que divide al polinomio característico *P*.

TEOREMA 7. Sea *V* un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$ y sea *T* un operador lineal sobre *V*. Entonces *T* es ***diagonalizable*** si, y solo si, el polinomio minimal de *T* tiene la forma.

$$m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$$

donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos distintos de $I\!K$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si *T* es ***diagonalizable***, entonces el polinomio minimal de *T* tiene la forma $m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos ***distintos*** de $I\!K$. Se ha demostrado en el Lema 6.

($\Leftarrow$) Si el polinomio minimal es de la forma $m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, donde $c_1, \ldots, c_k$ son elementos ***distintos*** de $I\!K$, entonces *T* es ***diagonalizable***. La demostración es por reducción al absurdo.

Las hipótesis son:

h_1 : *V* es un e.v. sobre $I\!K$.

h_2 : $T: V \longrightarrow V$

h_3 : el polinomio minimal tiene raíces distintas (esto es, no puede ocurrir que

$$m(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_j)^2 \ldots (x - c_k).)$$
$$= (x - c_j)^2 h(x)$$

c_j es raíz repetidos dos veces

Tesis t : T es diagonalizable (esto es, la $\dim V = n =$ número de vectores propios asociados a cada valor propio $c_1, \ldots, c_k$)

El método de reducción al absurdo, para este teorema, consiste en demostrar el valor de verdad de la siguiente proposición. $h_1 \wedge h_2 \wedge \sim t \longrightarrow \sim h_3$

Veamos:

1. Sea W el subespacio vectorial generado por todos los vectores propios de T, esto es, $W = gen\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, los β_i $(i = 1, \ldots, k)$ son los vectores propios.
2. Suponer que $W \neq V$ (por lo tanto: $\dim W < n$, esto es $\sim t$)
3. Por el Lema 6: existen un vector $\alpha \notin W$ y un valor propio c_j de T tal que $\beta = (T - c_j I)\alpha \in W$
4. Como $\beta \in W$ entonces $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_k$ donde $T\beta_i = c_i \beta_i$, $1 \le i \le k$

Necesitamos probar que el vector: $h(T)\beta$ es un elemento de W.

Para ello, necesitamos recordar lo siguiente:

a) $h(x) = x + x^2 + \ldots + x^k$ es un polinomio en $I\!K[x]$

b) $h(T) = T + T^2 + \ldots + T^k$ es un operador.

c) $h(c_j) = c_j + c_j^2 + \ldots + c_j^k$

d)
$$\begin{array}{ll} T\beta_1 = c_1\beta_1 & T\beta_k = c_k\beta_k \\ T^2\beta_1 = c_1^2\beta_1 & T^2\beta_k = c_k^2\beta_k \\ \vdots & \vdots \\ T^k\beta_1 = c_1^k\beta_1 & T^k\beta_k = c_k^k\beta_k \\ \hline T\beta_1 + \ldots + T^k\beta_1 = c_1\beta_1 + \ldots + c_1^k\beta_1 & T\beta_k + \ldots + T^k\beta_k = c_k\beta_k + c_k^k\beta_k \\ \underbrace{(T + \ldots + T^k)}_{h(T)}\beta_1 = \underbrace{(c_1 + \ldots + c_1^k)}_{h(c_1)}\beta_1 & (T + \ldots + T^k)\beta_k = (c_k + \ldots + c_k^k)\beta_k \end{array}$$

(4*) $\quad h(T)\beta_1 = h(c_1)\beta_1$, ..., $h(T)\beta_k = h(c_k)\beta_k$

5. En la igualdad: $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_k$ aplicar el operador $h(T)$
$$h(T)\beta = h(T)\beta_1 + \ldots + h(T)\beta_k$$
6. Por (4*): $\boxed{h(T)\beta = h(c_1)\beta_1 + \ldots + h(c_k)\beta_k}$
7. Pero: $h(c_1)\beta_1 + \ldots + h(c_k)\beta_k$ es un elemento de W, porque es una combinación lineal de los generadores de W, entonces $h(T)\beta \in W$, para cada polinomio h.
8. Por el algoritmo de la división de polinomios, si c_j es raíz del polinomio m, entonces existe un polinomio $q(x)$, tal que, $m(x) = (x - c_j)q(x)$.
9. Si el polinomio $q(x)$ se divide ente el monomio $(x - c_j)$, entonces por el algoritmo de la división de polinomios, existe un polinomio $h(x)$, tal que:
$$q(x) = (x - c_j)h(x) + \underbrace{R}_{\text{Residuo}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9^*)$$
donde $\quad q(c_j) = 0 + R$.
Luego, la igualdad (9*) se puede expresar del siguiente modo:
$$q(x) - q(c_j) = (x - c_j)h(x).$$
10. Si $x = T$, entonces $q(T) - q(c_j) = (T - c_j I)h(T)$ es un operador.
11. Aplicar en α: $(q(T) - q(c_j))\alpha = h(T)\underbrace{(T - c_j I)\alpha}_{\beta}$, por (3).
$$q(T)\alpha - q(c_j)\alpha = h(T)\beta$$
12. Por (7) afirmamos que: $h(T)\beta \in W$. Por lo tanto $q(T)\alpha - q(c_j)\alpha$ es un elemento de W.
13. En la diferencia anterior se tiene que: $\alpha \notin W$.
Pero el vector $q(T)\alpha \in W$ y $q(c_j)\alpha$ es un elemento de W sólo si $q(c_j) = 0$, para que se cumpla que $0 \cdot \alpha = \overline{0} \in W$
14. Así obtenemos en (9*): $q(x) = (x - c_j)h(x)$ y en (8) tendremos: $m(x) = (x - c_j)^2 h(x)$.

Este resultado contradice el hecho de que el polinomio minimal m tiene raíces distintas.

lqqd.

Ejemplo 09. Hagamos un paralelismo con dos matrices diferentes, en las cuales una matriz es triangulable y la otra es diagonalizable.

a) Sea $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ una matriz de un operador lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ en la base canónica.

Se tiene:

1. Polinomio característico:

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2$$

2. Polinomio minimal:

$$m(x)=(x-1)(x-2)^2$$

3. Valores propios: $\{1,2\}$

i) De $x-1$ obtenemos $A-I$ y el subespacio propio asociado al valor propio $x=1$ es:

$$W_1=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$$

ii) De $x-2$ obtenemos $A-2I$ y el subespacio propio asociado al valor propio $x=2$ es:

$$W_2=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

4. Tenemos un conjunto de dos vectores propios $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ que no constituye una base del espacio vectorial $V=I\!R^3$.

5. En este caso, la matriz A no es diagonalizable; pero es triangulable.

b) Sea $B=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$ una matriz de un operador lineal $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ en la base canónica.

Se tiene:

1. Polinomio característico:

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2$$

2. Polinomio minimal:

$$m(x)=(x-1)(x-2)$$

3. Valores propios: $\{1,2\}$

i) De $x-1$ obtenemos $A-I$ y el subespacio propio asociado al valor propio $x=1$ es:

$$W_1=gen\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}\right\}$$

ii) De $x-2$ obtenemos $A-2I$ y el subespacio propio asociado al valor propio $x=2$ es:

$$W_2=gen\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

4. Tenemos un conjunto de tres vectores propios $\beta=\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ que es una base del espacio vectorial $V=I\!R^3$.

5. En este caso, la matriz A es diagonalizable.

La matriz que diagonaliza a la matriz A es la matriz $P=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

La matriz diagonal es:

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=[T]_\beta$$

6. La matriz A se **TRIANGULA** mediante la matriz.

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & ½\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -½\end{bmatrix}$$

haciendo la operación:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 10. Sea T el operador lineal sobre $I\!R^2$ cuya matriz en la base ordenada canónica es $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

a) Demostrar que los únicos subespacios de $I\!R^2$ invariantes por T son $I\!R^2$ y el subespacio nulo.

b) Si U es un operador lineal en $\mathbb{C}^2$ cuya matriz en la base ordenada canónica es A, demostrar que U tiene un subespacio unidimensionalmente invariante.

<u>Solución:</u>

Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz A.

De $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ obtenemos $\to$ $\text{tr}\,A=1+2=3$; $\to$ $\det A=2+2=4$

Resolver: $\lambda^2-3\lambda+4=0$

$$\lambda^2-3\lambda+\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4}+4=0$$

$$\left(\lambda-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{7}{4}=0 \quad \begin{cases}\lambda=\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{7}}{2}i\\ \lambda=\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{7}}{2}i\end{cases}$$

Como las raíces del polinomio característico $P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+4$ no son números reales, afirmamos que:

a) Los valores propios del operador $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ no son números reales, entonces afirmamos que los únicos subespacios de $I\!R^2$ invariantes por T son: $I\!R^2$ y $\{0\}$, $0=(0,0)$.

b) Sea el operador lineal $U:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, cuya matriz en la base ordenada canónica es $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$. Los valores propios de U son: $\lambda_1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Ahora, hallemos el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Resolver la ecuación:

$$\begin{bmatrix}1-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right) & -1\\ 2 & 2-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i & -1\\ 2 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Se reduce a una sola ecuación: $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)x-y=0 \Rightarrow y=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)x$

Luego el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ es:

$$X=\begin{bmatrix}x\\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{bmatrix}$$

El subespacio de $\mathbb{C}^2$ generado por el vector propio

$\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{bmatrix}$ es $W=\left\{x\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\end{bmatrix} : x\in \mathbb{R}\right\}$

que es un subespacio unidimensional invariante.

6. DESCOMPOSICIÓN EN SUMA DIRECTA

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ y un operador lineal $T:V \longrightarrow V$, donde A es la matriz de T en la base canónica, pretendemos, esta vez, hallar todos los subespacios invariantes de V, tal que, el espacio vectorial V se puede expresar como la suma de subespacios invariantes para T.

Antes de hacer las definiciones y teoremas respectivos, ilustremos mediante tres ejemplos la suma $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$

Ejemplo 11. En el ejemplo 9 b) tenemos:

El operador lineal $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$T(x,y,z)=(5x-6y-6z\,,\,-x+4y+2z, 3x-6y-4z)$

- La matriz de T en la base canónica es $B=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$
- El polinomio característico de T es $f(x)=(x-1)(x-2)^2$
- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x=1$ es

  $W_1=\left\{t\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 3\end{bmatrix} : t\in \mathbb{R}\right\}$, la dimensión de W_1 es 1.

  es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y su vector dirección es $v=(3,-1,3)$

- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x=2$, es

  $W_2=\left\{s\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix} : s\in t\,;\, t\in \mathbb{R}\right\}$, la dimensión de W_2 es 2.

  es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por (0,0,0) y está generado por los vectores $\mu=(2,1,0)$ y $v=(2,0,1)$.

- La dimensión de $V=\mathbb{R}^3$ es 3.
- Porque la $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$, se cumple que:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2\\ V &= W_1 \oplus W_2\\ &= gen\left\{\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

se lee "el espacio vectorial $V=\mathbb{R}^3$ es igual a la suma directa de los subespacios propios W_1 y W_2.

- Ha sucedido que el espacio base V se ha descompuesto en una suma de subespacios invariantes para T.

Geométricamente, la suma directa que acabamos de hacer, indica que los vectores propios $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ conforman una base de $I\!R^3$ y en consecuencia estos vectores generan todo $I\!R^3$.

Ejemplo 12. En el ejemplo 9 a) tenemos:
El operador lineal $T: V \longrightarrow V$, $V = I\!R^3$, definido por
$T(x,y,z) = (3x+y-z, 2x+2y-z, 2x+2y)$

- La matriz de T en la base canónica es $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

- El polinomio característico de T es $f(x) = (x-1)(x-2)^2$

- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x = 1$, es:

$$W_1 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}, \quad \dim W_1 = 1$$

- El subespacio invariante por T correspondiente al valor propio $x = 2$, es:

$$W_2 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} : s \in I\!R \right\}, \quad \dim W_2 = 1$$

- En este caso, el espacio vectorial $V = I\!R^3$ no se puede expresar como la suma directa de los subespacios W_1 y W_2, porque el conjunto de vectores propios $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ no constituye una base de $V = I\!R^3$.

Pero: $W = W_1 \oplus W_2$ es un nuevo subespacio de $I\!R^3$ (es un plano generado por los vectores $(1,0,2)$, $(1,1,2)$.

Ejemplo 13. Sea $T: V \longrightarrow V$, $V = I\!R^3$, el operador lineal definido por
$T(x,y,z) = (x+2y+5z, 3x+5y+13z, -2x-y-4z)$

a) Hallar el núcleo de T.
b) Hallar la imagen de T.
c) ¿Será cierto que $V = \ker T \oplus \operatorname{Im}(T)$?

Solución a):

El operador lineal T se puede escribir de la siguiente forma.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$ es la matriz T en la base canónica.

Ahora, hallemos el núcleo de T: $\quad \ker T = \{ v \in V : T(v) = 0 \}$, $\quad v = (x, y, z)$

$$\begin{matrix} (2) \\ (-3) \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reducir esta matriz a la forma escalonada.

$$\text{por } (-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} (-3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La ecuación lineal homogénea se ha reducido a:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \rightarrow x = -2y - 5z \quad \ldots\ldots (1) \\ y + 2z = 0 \rightarrow \boxed{y = -2z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $\quad x = -2(-2z) - 5z$

$$\boxed{x = -z}$$

El vector solución es: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad z = I\!R^2$

Así, hemos obtenido: $\ker T = \left\{ t\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} : t\in I\!R \right\}$ $\Leftarrow$ es una recta en $I\!R^3$ que pasa por (0,0,0).

Además: $\dim(\ker T) = 1$

Solución de b):

La imagen de T ($\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \in V : w = T(v) \text{ para algún } w \in V\}$)

- **La forma práctica de hallar la imagen de T es reduciendo a la forma escalonada la transpuesta de la matriz A.**

La transpuesta de A es: $A^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 5 & -1\\5 & 13 & -4\end{bmatrix}$ (−2), (−5), +

$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & -1 & 3\\0 & -2 & 6\end{bmatrix} \longleftarrow$ Por (−1)

$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & -3\\0 & -2 & -6\end{bmatrix}$ (2), + $\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Conclusión: Una base de la $\mathrm{Im}\,T$ es el conjunto de los vectores fila de esta última matriz escalonada $\left\{ \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} \right\}$

Esto es $\mathrm{Im}\,T = \left\{ t\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} : t, s \in I\!R \right\}$ $\Leftarrow$ es un plano en $I\!R^3$ que pasa por (0,0,0)

Además: $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 2$

c) Como: $\dim(\ker T) + \dim(\mathrm{Im}\,T) = 3 = \dim V$, afirmamos que,

$V = \ker T \oplus \mathrm{Im}(T)$

└ el espacio vectorial $V = I\!R^3$ es la suma directa del núcleo de T más la imagen de T.

A continuación daremos la definición de subespacios independientes y luego la demostración de un lema que nos conlleva a la definición de suma directa de subespacios invariantes.

Definición.- Sean $W_1,\dots,W_k$ subespacios de un espacio vectorial V. Se dice que $W_1,\dots,W_k$ son ***independientes*** si $\alpha_1 + \dots + \alpha_2 = 0$, $\alpha_i \in W_i$ ***implica*** que cada α_i es 0. Esta definición indica lo siguiente:

a) Para $k = 2$, esto es, si tenemos dos subespacios W_1 y W_2: W_1 y W_2 son independientes si, y sólo si, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

b) Para $k > 2$, los subespacios $W_1,\dots,W_k$ son ***independientes*** si, y solo si, $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k = \{0\}$, además cada W_i encuentra la suma de otros subespacios W_i sólo en el vector nulo.

Ejemplo 14. Sean $W_1 = \left\{ t\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}$ y $W_2 = \left\{ r\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} : r, s \in I\!R \right\}$

dos subespacios de $V = I\!R^3$, ¿son W_1 y W_2 independientes?

Solución:

Si pruebo que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ afirmaré que W_1 y W_2 son independientes.

Veamos:

Sea $\alpha \in W_1 \cap W_2$

entonces $\alpha \in W_1 \ \wedge\ \alpha \in W_2$

si $\alpha \in W_1$, entonces $\alpha = t(-1,-2,1)$ .... (1)

si $\alpha \in W_2$, entonces $\alpha = r(1,3,-2) + s(0,1,-3)$ .... (2)

Al igualar (1) y (2) obtenemos: $t(-1,-2,1) = r(1,3,-2) + s(0,1,-3)$

$$\begin{cases} -t - r = 0 \\ -2t - 3r - s = 0 \\ t - 2r - 3s = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{La única solución de este sistema es: } t = 0,\ r = 0,\ s = 0$$

Si $t=0$, entonces el vector $t(-1,-2,1)=(0,0,0)$ similarmente si $r=0$, $s=0$, el vector $r(1,3,-2)+s(0,1,-3)=(0,0,0)$.

Este resultado nos indica que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$ y por lo tanto, existe la suma directa $W_1 \oplus W_2$.

Por lo tanto: $u \in W_1 \oplus W_2$ implica $u = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_2$, $w_2 \in W_2$

$$u = \underbrace{t(-2,-2,1)}_{w_1} + \underbrace{r(1,3,-2)+s(0,1,-3)}_{w_2}$$

Lema 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ subespacios de V y sea $W = W_1+\ldots+W_k$. Son equivalentes, las siguientes afirmaciones.

a) $W_1,\ldots,W_2$ son independientes.

b) Para todo j, $2\le j\le k$, se tiene: $W_j \cap (W_1+\ldots+W_{j-1}) = \{0\}$

c) Si B_i es una base ordenada de W_i, $1\le i\le k$, entonces la sucesión $B=(B_1,\ldots,B_k)$ es una base ordenada para W.

Demostración:

Debo probar que (a) ⟹ (b) ⟹ (c) ⟹ (a). Se lee "(a) implica (b), (b) implica (c) y (c) implica (a)

Probemos que (a) ⟹ (b)

♦ Supongamos que se cumple (a).

♦ Sea α un vector, tal que, $\alpha \in W_j \cap (W_1+\ldots+W_{j-1})$

$\Rightarrow \quad \alpha \in W_j \ \wedge \ \alpha \in (W_1+\ldots+W_{j-1})$

♦ Si $\alpha \in (W_1+\ldots+W_{j-1})$, existen vectores $\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1}$ tales que

$\alpha = \alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}$ .... (1)

♦ De (1) obtenemos $\alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}+(-\alpha)=0$.

♦ Que se puede escribir $\alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}+(-\alpha)+0+\ldots+0=0$ y como $W_1,\ldots,W_k$ son independientes, debe ser que: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{j-1}=\alpha=0$.

♦ Este último resultado nos indica que $W_j \cap (W_1+\ldots+W_{j-1}) = \{0\}$

Probemos que (b) ⟹ (c).

♦ Formemos la sucesión $B=(B_1,\ldots,B_k)$ donde, por hipótesis cada conjunto B_i es una base de W_i, $1\le i\le k$.

Queremos probar que $B=(B_1,\ldots,B_k)$ es una base de W.

Si $b_i \in B_i \Rightarrow b_i$ es combinación lineal de los vectores en B_i, $1\le i\le k$.

♦ Cualquier relación lineal entre los vectores de B tendrá la forma:

$$b_1+\ldots\ldots+b_k=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

donde b_i es cierta combinación lineal del los vectores en B_i, porque B_i es una base de W_i.

♦ Por hipótesis se tiene: $W_j \cap (W_1+\ldots+W_{j-1}) = \{0\}$, lo cual implica que $W_1,\ldots,W_k$ son independientes y por tanto, cada b_i es 0. Como cada B_i es independiente, la relación (*) entre los vectores en B es la relación trivial. Esto prueba que $B=(B_1,\ldots,B_k)$ es una base ordenada de B.

(c) ⟹ (a) *queda como ejercicio.*

Definición 9.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ subespacios propios de V y sea $W=W_1+\ldots+W_k$.

Si $W_j \cap (W_1+\ldots\ldots+W_{j-1}) = \{0\}$ para todo j, $2\le j\le k$, entonces se dice que la suma $W=W_1+\ldots+W_k$ es la suma directa de $W_1,\ldots,W_k$, y se escribe.

$$W = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$$

Ejemplo 15. Sea $V=\{A\in I\!K^{n\times n}: A=(a_{ij}), a_{ij}\in I\!K\}$

└── el espacio de las matrices cuadradas de orden n, $n\in Z^+$

Sean los subespacios: $W_1=\{A\in I\!K^{n\times n}: A^T=A\}$

└── subespacio de las matrices simétricas.

$W_2=\{A\in I\!K^{n\times n}: A^T=-A\}$

└── subespacio de las matrices antisimétricas.

Se cumple: $W_1\cap W_2=\{0\}$, $0=\begin{bmatrix}0 & 0\cdots\cdots & 0\\ 0 & 0\cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots\cdots & 0\end{bmatrix}$

Pues: $A\in W_1\cap W_2 \Rightarrow A\in W_1 \quad \wedge \quad A\in W_2$

$\Rightarrow A^T=A \quad \wedge \quad A^T=-A$

al sumar: $2A^T=0 \Rightarrow A^T=0 \Rightarrow A=0$

Entonces V es la suma directa de W_1 y W_2, esto es: $V=W_1\oplus W_2$

$$A=\underbrace{\tfrac{1}{2}(A+A^T)}_{A_1}+\underbrace{\tfrac{1}{2}(A-A^T)}_{A_2}$$

donde $A_1=\frac{1}{2}(A+A^T)$ es un elemento de W_1.

y $A_2=\frac{1}{2}(A-A^T)$ es un elemento de W_2

Ejemplo 16. Sea el operador lineal $T:V\longrightarrow V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1,\ldots,W_k$ los subespacios propios independientes. Si T es diagonalizable, entonces $V=W_1\oplus\ldots\ldots\oplus W_k$.

6.1 PROYECCIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 10 Si V es un espacio vectorial, una proyección de V es un operador lineal E sobre V, tal que $E^2=E$.

Esto es, el operador lineal $E:V\longrightarrow V$ es una proyección de V, si $E^2=E$.

Ejemplo 17. Sea el operador $E:V\longrightarrow V$, $V=I\!R^3$, definido por:

$$E(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\,,\,\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\,,0\right)$$

¿Es E una proyección de V?

Solución:

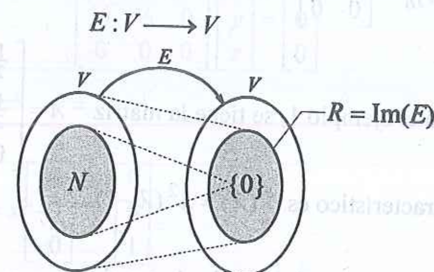
La matriz asociada al operador E en la base canónica $\mathcal{C}$ es: $A=[E]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Se cumple: $E^2=E \quad (A^2=A)$

6.1.1 IMAGEN Y NÚCLEO DE UNA PROYECCIÓN

Supóngase que E es una proyección $(E^2=E)$

$E:V\longrightarrow V$



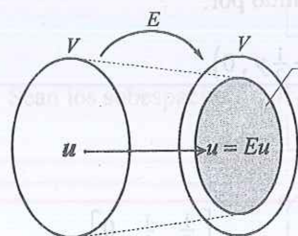
Sea R la imagen de E, esto es $R=\operatorname{Im}(E)$

y Sea N el núcleo de E, esto es $N=\ker E$.

Se tiene:

1. El vector u está en la imagen R si, y solo si, $Eu=u$.
2. $V=R\oplus N$
3. La expresión única de u, como suma de vectores en R y en N, es $u=Eu+(u-Eu)$

Demostración de 1



($\Rightarrow$) Por definición de operador lineal, al elegir un vector $w \in V$, mediante E, hacemos corresponder a un vector $u \in R$, tal que,

$$u = Ew \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Aplicar E: $Eu = E(Ew)$

$$= E^2 w \text{, como } E^2 = E$$

entonces $\quad Eu = Ew \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Por (1): $\quad Eu = u$

Proposición.- Cualquier proyección E es trivialmente diagonalizable. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es una base de R y $\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es una base de N, entonces la base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ diagonaliza a E.

$[E]_B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde I es la matriz unidad $r \times r$.

Ejemplo 18. En el ejemplo 1, se tiene la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$.

2. Del valor propio $\lambda = 1$, se obtiene el subespacio $S_{\lambda=1} = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

   Del valor propio $\lambda = 0$, se obtiene el subespacio $S_{\lambda=0} = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

3. E es diagonalizable por la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   obteniéndose $D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Ahora, analicemos por el lado de la imagen de E y el núcleo de E.

   a) Una base de la imagen de E, se obtiene transformando la transpuesta de la matriz A en matriz escalonada.

   Así: $A^T = \begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \, \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{por 2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1$

   Entonces una base de la imagen de E, es $R = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

   ↑ es la transpuesta del primer vector fila de A_1

   b) Una base del núcleo de E se halla resolviendo el siguiente sistema:

   $$\begin{bmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Se obtiene: $x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x$

   Luego: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Entonces $\ker E = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

   Según la proposición, la base $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

   diagonaliza E: $[E]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ es una matriz diagonal trivial donde $I = [1]$

TEOREMA 08. Si $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$, entonces existen k operadores lineales $E_1, \ldots\ldots, E_k$ sobre V tales que:

i) Todo E_i es una proyección $(E_i^2 = E_i)$

ii) $E_i E_j = 0$, si $i \neq j$

iii) $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

iv) La imagen de E_i es W_i.

Recíprocamente, si $E_1, \ldots\ldots, E_k$ son operadores lineales que satisfacen las condiciones (*i*), (*ii*) y (*iii*) y se hace que W_i sea la imagen de E_i, entonces $W = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$.

Demostración.-

1. Por hipótesis se tiene que: $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$.
2. Sea $\alpha \in V$, entonces $\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, con $\alpha_i \in W_i$ .... (por 1.)
3. Se define el operador $E_j : V \longrightarrow V$

$$\alpha \longmapsto \alpha_j = E_j(\alpha)$$

entonces E_j es una ley bien definida y se prueba que E_j es lineal.

Veamos: Sean $\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, $\alpha_i \in W_i$

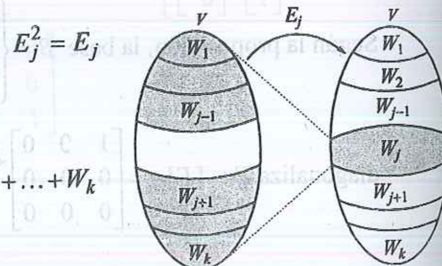
$a\beta = a\beta_1 + \ldots\ldots + a\beta_k$, $\beta_i \in W_i$, $a \in \mathbb{K}$

Además: $E_j(\alpha + a\beta) = \underbrace{E_j\alpha_1}_{=\ 0} + \ldots + \underbrace{E_j\alpha_j}_{\alpha_j} + \ldots + \underbrace{E_j\alpha_k}_{0} + \underbrace{aE_j\beta_1}_{0} + \ldots + \underbrace{aE_j\beta_j}_{\beta_j} + \underbrace{aE_j\beta_k}_{0}$

$= \alpha_j + a\beta_j$

$= E_j\alpha + a\,E_j(\beta)$, cada E_j es una proyección y $W_1, \ldots, W_k$ son subespacios independientes.

4. Se tiene: a) $\underbrace{\mathrm{Im}(E_j) = W_j}_{E_j(V) = W_j}$ y que $E_j^2 = E_j$



b) $\ker E_j = W_1 + \ldots + W_{j-1} + W_{j+1} + \ldots + W_k$

└── es el espacio nulo de E_j

en efecto, la afirmación que $E_j\alpha = 0$ solo dice que $\alpha_j = 0$, (por 3. $E_j\alpha = \alpha_j$) es decir, que α es efectivamente una suma directa de vectores de los espacios W_i con $i \neq j$, esto es, $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + \alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_k$, pues $\alpha_j = 0$.

5. En términos de las proyecciones E_j, se tiene:

$\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, donde $\alpha_j = E_j(\alpha)$

entonces $\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$, pero $\alpha = I\alpha$

$I\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$

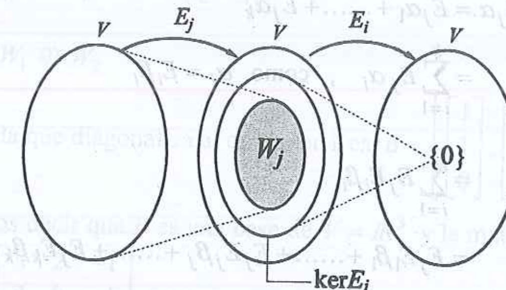
$I\alpha = (E_1 + \ldots\ldots + E_k)\alpha$, E_j es una aplicación lineal.

luego $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

6. Ahora, probemos que: si $i \neq j$ entonces $E_i E_j = 0$

Veamos:

a) Se tiene que: $\mathrm{Im}(E_j) = W_j$, donde $W_j \subset \ker E_i$



Haciendo $E_iE_j(V) = E_i(E_j(V))$, $E_j(V) = W_j$ .... (por 4)

$= E_i(W_j)$, pero $W_j \subset \ker E_i$, entonces $E_i(W_j) = 0$

$= 0$

Así queda probado que $E_iE_j = 0$

Demostración de la recíproca:

1. Supongamos que $E_1, \ldots\ldots, E_k$ son operadores lineales sobre V que satisfacen las tres primeras condiciones y sea W_i la imagen de E_i,

Esto es: $E_j ; V \longrightarrow V$, con $i)$ $E_i^2 = E_i$

$ii)$ $E_i E_j = 0$, $\forall\, i \neq j$

$iii)$ $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

además $E_i(V) = W_i$ ← imagen de E_i

Debo probar que: $E_j \alpha = \alpha_j$

2. De *iii)* se deduce: $I\alpha = (E_1 + \ldots\ldots + E_k)\alpha$

(2*) $\boxed{\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha}$, para todo $\alpha \in V$ y $E_i\alpha \in W_i$

Entonces se cumple: $V = W_1 + \ldots\ldots + W_k$

3. La expresión dada en (2*) es única, pues si

$\alpha = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_k$, con $\alpha_i \in W_i$, donde $\alpha_i = E_i\beta_i$

Aplicar E_j :
$$\begin{aligned} E_j\alpha &= E_j\alpha_1 + \ldots\ldots + E_j\alpha_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} E_j\,\alpha_i \quad , \text{ como } \alpha_i = E_i\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} E_j E_i \beta_i \\ &= E_j E_1\beta_1 + \ldots\ldots + E_j E_j \beta_j + \ldots\ldots + E_j E_k \beta_k \\ &= \quad 0 \quad + \ldots\ldots + \quad E_j^2\beta_j \quad + \ldots\ldots + \quad 0 \\ &= E_j^2\,\beta_j \quad , \text{ pero } E_j^2 = E_j \\ &= E_j\beta_j \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Esto muestra que V es la suma directa de los W_i.

Ejemplo 19. Sea el operador lineal $T : V \longrightarrow V$, $V = I\!R^3$ donde $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ es la matriz de T en la base canónica.

a) Su polinomio característico es $P(x) = (x-6)^2(x-12)$.

b) El subespacio propio asociado al valor propio $x = 6$ es:

$W_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, donde $B_1 = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ es una base de W_1. Además $\dim W_1 = 2$

c) El subespacio propio asociado al valor propio $x = 12$ es:

$W_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$, donde $B_2 = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ es una base de W_2 . Además $\dim W_2 = 1$.

d) Se cumple: $V = W_1 \oplus W_2$

e) Una base ordenada que diagonaliza al operador T es $B = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

También, podemos decir que B es una base de $V = I\!R^3$ y la matriz que diagonaliza a la matriz A es: $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Esto es: $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, donde $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \end{bmatrix}$

f) Se cumplen: $D = 6\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_1} + 6\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_2} + 12\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_3}$

$$D = 6Q_1 + 6Q_2 + 12Q_3$$

$$\underbrace{P\,DP^{-1}}_{A} = 6\underbrace{PQ_1P^{-1}}_{E_1} + 6\underbrace{PQ_2P^{-1}}_{E_2} + 12\underbrace{PQ_3P^{-1}}_{E_3}$$

$$A = 6\,E_1 \quad + \quad 6\,E_2 \quad + \quad 12\,E_3$$

donde: $E_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 4/6 & -4/6 & 4/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & -2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \\ -2/6 & 2/6 & 4/6 \end{bmatrix}$

g) $E_1^2 = E_1 \quad , \quad E_2^2 = E_2 \quad , \quad E_3^2 = E_3$

h) $E_1 E_2 = 0 \quad , \quad E_1 E_3 = 0 \quad , \quad E_2 E_3 = 0$

i) $E_1 + E_2 + E_3 = I$

j) Ahora hallemos las imágenes de los operadores $E_j : V \longrightarrow V$, $j = 1,2,3$ cuyas matrices asociadas, en la base canónica; respectivamente, son:

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \; [E_2] = \begin{bmatrix} 4/6 & -4/6 & 4/6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{bmatrix} , \; [E_3] = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & -2/6 \\ -1/6 & 1/6 & 2/6 \\ -2/6 & 2/6 & 4/6 \end{bmatrix}$$

k) La imagen de E_1 se halla, transformando la transpuesta de la matriz $[E_1]$ en matriz escalonada. Así:

$$\begin{matrix} \\ (2)\,(-5) \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 0 \\ -2/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix} \sim \; 4\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Entonces } \operatorname{Im}(E_1) = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Se obtiene de la fila 1, multiplicando por 6.

Como vemos, la $\operatorname{Im}(E_1)$ está generada por el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que es un elemento de la base de W_1.

De manera similar se obtienen:

$\operatorname{Im}(E_2) = gen\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, donde $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector de la base de W_1.

$\operatorname{Im}(E_3) = gen\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, donde $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es vector generador de W_2.

l) Cuando se escribe: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; con $\alpha_i \in W_i$, $i = 1,2$

indica que $\alpha_1 = a(1,1,0) + b(2,0,1)$ y $\alpha_2 = c(-1,1,2)$

Así tendremos $\quad \alpha = a(1,1,0) + b(2,0,1) + c(-1,1,2)$

Además $\quad T\alpha = T_1\,\alpha_1 + T_2\,\alpha_2$

donde: $\quad T : V \longrightarrow V$, está definido por $T(x,y,z) = (x+2y-z, x+z, y+2z)$ es la base B.

$T_1 : W_1 \longrightarrow W_1$, está definido por $T_1(x,y,z) = (y+2z, y, z)$ en la base B_1

$T_2 : W_2 \longrightarrow W_2$, está definido por $T(x,y,z) = (-x, x.2x)$ en la base B_2

m) Existe una relación directa entre el polinomio característico $P(x) = (x-6)^2(x-12)$ y las dimensiones de los subespacios W_1 y W_2.

$2 = \dim W_1 =$ multiplicidad de $(x-6)$

$1 = \dim W_2 =$ multiplicidad de $(x-12)$

La forma matricial más sencilla de representarse el operador T es $D = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$,

donde $D_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $D_2 = [12]$

D es la matriz mas elemental del operador T en la base $\varepsilon = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$.

TEOREMA 09. Sea T un operador lineal sobre el espacio V y sean $W_1,\ldots,W_k$ y $E_1,\ldots,E_k$ como en el teorema 8. Entonces una condición necesaria y suficiente para que cada subespacio W_i sea invariante por T es que T conmute con cada una de las proyecciones E_i, es decir,

$$T E_i = E_i T \quad , \quad i=1,\ldots,k$$

Demostración.-

($\Leftarrow$) Supongamos que $T E_i = E_i T$ entonces se debe probar que W_i es un subespacio invariante de T.

Eligiendo $\alpha \in W_1$ bastará probar que $T\alpha \in \text{Im}(E_i)$

Veamos:

- Sea $\alpha \in W_i$, entonces $E_i\alpha = \alpha$, pues $E_i : W_i \longrightarrow W_i$, $\alpha \longmapsto E_i\alpha = \alpha$
- Aplicando T: $T\alpha = T(E_i\alpha)$
- Pero $T E_i = E_i T$, entonces $= E_i(T\alpha)$
- Esto demuestra que $T\alpha \in \text{Im}(E_i)$, es decir W_i es invariante por T.

($\Rightarrow$) Suponer que W_i es invariante por T, se debe probar que $T E_i = E_i T$

Veamos:

1. Sea α cualquier vector de $V \Rightarrow$ $\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$
2. Aplicar T $\quad T\alpha = T E_1\alpha + \ldots + T E_k\alpha$ .... (1*)
3. Como $E_i\alpha$ está en W_i, que es invariante por T, se debe tener que $T(E_i\alpha)$ está en W_i y además $T(E_i\alpha) = E_i\beta_i$ para algún vector β_i.
4. Aplicar E_j $\quad E_jT(E_j\alpha) = E_j E_i \beta_i$
$$= \begin{cases} 0 \ , & si \quad i \neq j \\ 1 \ , & si \quad i = j \end{cases}$$

5. En (1*) aplicar E_j
$$E_j T\alpha = E_jT E_1\alpha + \ldots + E_jT E_j\alpha + \ldots + E_jT E_k\alpha$$
6. Por 3, sustituir $\quad E_jT\alpha = \underbrace{E_j E_1}_{0}\beta_1 + \ldots + \underbrace{E_jE_j}_{E_j^2}\beta_j + \ldots + \underbrace{E_jE_k}_{0}\beta_k$
$$\underbrace{\qquad}_{E_j\beta_j}$$
$$= E_j\beta_j$$
7. Por 3: $\quad = T E_j \alpha$
8. Este resultado es válido para cada α de V, o sea: $E_jT = T E_j$

TEOREMA 10. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Si T es diagonalizable y si $c_1,\ldots\ldots,c_k$ son los valores propios distintos de T, entonces existen operadores lineales $E_1,\ldots\ldots,E_k$ en V tales que:

i) $T = c_1E_1 + \ldots\ldots + c_kE_k$

ii) $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

iii) $E_iE_j = 0 \quad , \quad i \neq j$

iv) $E_i^2 = E_i$ (E_i es una proyección)

v) La imagen de E_i es el espacio propio de T, asociado a c_i recíprocamente, si existen k escalares distintos $c_1,\ldots,c_k$ y k operadores lineales no nulos $E_1,\ldots\ldots,E_k$ que satisfacen (*i*), (*ii*) y (*iii*), entonces T es diagonalizable, $c_1,\ldots,c_k$ son los valores propios distintos de T y las condiciones (*iv*) y (*v*) también se cumplen.

Demostración.-

1. Por hipótesis se tiene que: T es diagonalizable, con valores propios distintos $c_1,\ldots\ldots,c_k$.
2. Sea W_i el subespacio de los vectores propios asociados al valor propio c_i, esto implica que: $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$ .... (2*)
3. Sea $E_1,\ldots\ldots,E_k$ las proyecciones asociadas con la descomposición dado en (2*). En base al teorema 8, se cumplen (*ii*), (*iii*), (*iv*) y (*v*).

Probemos la proposición (i):

4. Para cada $\alpha \in V$, se tiene: $\alpha = E_1\alpha + \ldots + E_k\alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} E_j : W_j \longrightarrow W_j \\ \alpha \longmapsto \alpha_j = E_j\alpha \end{array} \right.$

5. Aplicar T $\quad T\alpha = TE_1\alpha + \ldots + TE_k\alpha$

6. Pero $TE_i\alpha = c_iE_i\alpha \quad \Rightarrow \quad T\alpha = c_1E_1\alpha + \ldots + c_kE_k\alpha$

   $i = 1, \ldots, k$ $\qquad = (c_1E_1 + \ldots + c_kE_k)\alpha$

7. Implica que: $\quad T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$

   Así queda probado (*i*).

Para garantizar la prueba de (*i*), probemos que $TE_i\alpha = c_iE_i\alpha$

Veamos:

Suponiendo que sea verdadero: $\quad T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$

Multiplicar por la derecha E_i $\quad TE_i = c_1\underbrace{E_1E_i}_{0} + \ldots + c_i\underbrace{E_iE_i}_{\underbrace{E_i^2}_{E_i}} + \ldots + c_k\underbrace{E_kE_i}_{0}$

$$TE_i = c_iE_i$$

Aplicar en α: $\quad TE_i\alpha = c_iE_i\alpha$

La recíproca: demostrar $\left\{ \begin{array}{l} (iv) \quad E_i^2 = E_i \\ a) \quad TE_i = c_iE_i \\ b) \quad T \text{ es diagonalizable} \\ (v) \quad \text{Im}(E_i) = W_i \text{ , } W_i \text{ es el espacio propio de } T \text{, asociado a } c_i. \end{array} \right.$

Prueba de (*iv*)

Las hipótesis son $\left\{ \begin{array}{l} h_1. \quad \text{Tenemos un operador } T : V \longrightarrow V \\ h_2. \quad \text{Distintos escalares } c_1, \ldots, c_k \text{ y operadores no nulos } E_i \text{ que satisfacen: } \\ \qquad (i) \quad T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k \\ \qquad (ii) \quad I = E_1 + \ldots + E_k \\ \qquad (iii) \quad E_iE_j = 0 \text{ , } i \neq j \end{array} \right.$

Prueba de (*iv*)

En (*ii*) se tiene $\quad : \quad I = E_1 + \ldots + E_k$

multiplicar por E_i $\quad : \quad E_iI = \underbrace{E_iE_1}_{0} + \ldots + \underbrace{E_iE_i}_{E_i^2} + \ldots + \underbrace{E_iE_k}_{0}$, $i \neq j$

$$E_i = E_i^2$$

Prueba de a)

En (*i*) se tiene: $\quad T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$

multiplicar por E_i a la derecha: $\quad TE_i = c_1\underbrace{E_1E_i}_{0} + \ldots + c_iE_iE_i + \ldots + c_k\underbrace{E_kE_i}_{0}$

$TE_i = c_iE_i^2$, pero $E_i^2 = E_i$

$TE_i = c_iE_i$

Prueba de b)

Si en la igualdad $TE_i = c_iE_i$ aplicamos sobre el vector $\alpha \in V$, con $\alpha \neq 0$, obtenemos:

$T(E_i\alpha) = c_i(E_i\alpha)$ .... $(b*)$

esta igualdad nos indica que el vector:

$E_i\alpha \in \ker(T - c_iI)$

└── es un vector de la imagen de E_i.

Nota: Sea $T : V \longrightarrow V$

Si c es un valor propio, existe un vector $\alpha \neq 0$ en V tal que:

$T\alpha = c\alpha$

$T\alpha - c\alpha = 0$

$T\alpha - cI\alpha = 0$

$(T - cI)\alpha = 0$

Esta igualdad nos dice que:

$\alpha \in \ker(T - cI)$

Como $E_i\alpha \neq 0$, de la igualdad $(b*)$ podemos deducir que los escalares c_i, son todos los únicos valores propios de T (unicidad de cada c_i); en efecto, si suponemos que c es otro escalar cualquiera, se tendría:

$$T - cI = (c_1 - c)E_1 + \ldots + (c_k - c)E_k$$

Viene de sumar: (1) − (2) $\left\{ \begin{array}{l} T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k \text{ ....(1)} \\ I = E_1 + \ldots + E_k \\ cI = cE_1 + \ldots + cE_k \text{ ....(2)} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow (T - cI)\alpha = (c_1 - c)E_1\alpha + \ldots + (c_k - c)E_k\alpha$$

Pero: $(T - cI)\alpha = 0$, con $\alpha \neq 0$

Lo cual implica que cada $(c_i - c)E_i\alpha = 0$, pero $E_i\alpha \neq 0$,

entonces $c_i - c = 0$

$c_i = c$

Esta igualdad nos indica que, al elegir otro escalar c, este necesariamente coincide con algún c_i.

Afirmamos que T es diagonalizable, porque
- $\forall \beta_i \in \text{Im}(E_i)$, β_i es un vector propio de T.
- $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$, muestra que los vectores β_i generan V.

Ahora; demostrar que el $\ker(T - c_iI) = \text{Im}(E_i)$

Para ello, probar que: $\alpha = E_i\alpha$ (esto prueba que $\alpha \in \text{Im}(E_i)$)

Veamos:

Si $T\alpha = c_i\alpha$

entonces $(T - c_iI)\alpha = 0$

viene de:
- $T = c_1E_1 + \ldots\ldots + c_kE_k$
- $I = E_1 + \ldots\ldots + E_k$

$-c_iI = -c_iE_1 - \ldots\ldots - c_iE_k$

$T - c_iI = (c_1 - c_i)E_1 + \ldots + (c_k - c_i)E_k$

Pero: $(T - c_iI)\alpha = \sum_{j=1}^{k}(c_j - c_i)E_j\alpha = 0$ para cada j

entonces $E_j\alpha = 0$, $j \neq i$

Como $\alpha = E_1\alpha + \ldots\ldots + E_k\alpha$ y $E_j\alpha = 0$, para $j \neq i$, se tiene que

$\alpha = E_i\alpha$

esta igualdad demuestra que $\alpha \in \text{Im}(E_i)$ ■

7. TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN PRIMA

FORMAS CANÓNICAS

Dado un operador lineal $T: V \longrightarrow V$ de dimensión finita, tratemos de descomponer el operador T en una suma directa de operadores elementales. Esto es posible solo cuando el polinomio minimal se puede factorizar, sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), en polinomios mónicos distintos de grado 1.

La descomposición del operador T en una suma directa de operadores elementales, es equivalente a la descomposición de la matriz A asociado al operador T en la base canónica, en **OTRA MATRIZ DIAGONAL POR BLOQUES**, donde el **BLOQUE DE ENTRADA** es una matriz cuadrada que tiene una de las siguientes tres formas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada a la matriz **NILPOTENTE** de índice $k = 4$ (es decir $A^4 = 0$).

Los elementos encima de la diagonal principal son 1, el resto son ceros.

la matriz **DIAGONAL** por bloques es:

$$N = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada al polinomio $(x-2)^4$ donde $x = 2$ es un valor propio. Todos los elementos de la diagonal principal son el valor propio $x = 2$ y los elementos, encima de la diagonal principal son 1. El resto son ceros.

La matriz diagonal por bloques es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

esta matriz **BLOQUE**, de entrada, está asociada al polinomio mónico: $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Los elementos de la última columna son los coeficientes de $P(x)$ con signo cambiado y los elementos de la subdiagonal son **1**. El resto son ceros. La matriz J se llama matriz acompañante del polinomio $P(x)$

La matriz diagonal por bloques es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b_1 \end{array}\right]$$

FORMA RACIONAL

Aclaremos con algunos ejemplos acerca de la forma canónica de Jordan y de la forma racional.

Ejemplo 01.

Hallar todas las formas canónicas de Jordan posibles para aquellas matrices cuyos polinomios característicos $P(x)$ y mínimo $m(x)$ son:

a) $p(x)=(x-2)^4(x-3)^2$; $m(x)=(x-2)^2(x-3)^2$

b) $p(x)=(x-5)^7$; $m(x)=(x-5)^3$

Solución:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & & \\ & & 5 & & & & & \\ & & & 5 & 1 & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & \\ & & 5 & & & & \\ & & & 5 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$

LEMA 8 :

Sea el operador lineal $T:V\longrightarrow V$ de dimensión finita. Sean $\{T\mu_1,\dots,T\mu_p\}$ una base de la imagen del operador T y $\{v_1,\dots,v_q\}$ una base del núcleo de T. Entonces el conjunto $\{\mu_1,\dots,\mu_p,v_1,\dots,v_q\}$ es la base de V.

Además: $\dim V=\dim(\operatorname{Im}(T))+\dim(\ker(T))=p+q$

Aplicando el lema, resolver el siguiente ejemplo:

Ejemplo 02.

Problema.- Sea el operador nilpotente $T:V\longrightarrow V$, de índice 2 en un espacio vectorial V de dimensión finita.

Si p es el rango de T, se pide:

a) hallar una base de V.

b) hallar la matriz de T en la base V.

Solución:

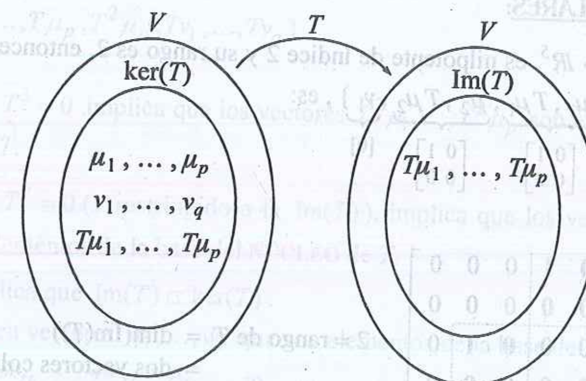
- Si T es un operador nilpotente de índice 2, entonces $T\neq 0$; $T^2=0$.
- Como el rango de T es p, entonces $p=$ rango $T=\dim(\operatorname{Im}(T))$ y tomemos una base $\{T\mu_1,\dots,T\mu_p\}$ de la $\operatorname{Im}(T)$.
- La condición $T^2=0$ implica $\operatorname{Im}(T)\subset\ker(T)$

Pues: $T(\mu)\in\operatorname{Im}(T) \Rightarrow T(T(\mu))\in\operatorname{Im}(T)$

$\Rightarrow T^2(\mu)\in\operatorname{Im}(T)$

Pero $T^2(\mu)=0$ entonces $T(T(\mu))=0$ implica $T(\mu)\in\ker(T)$

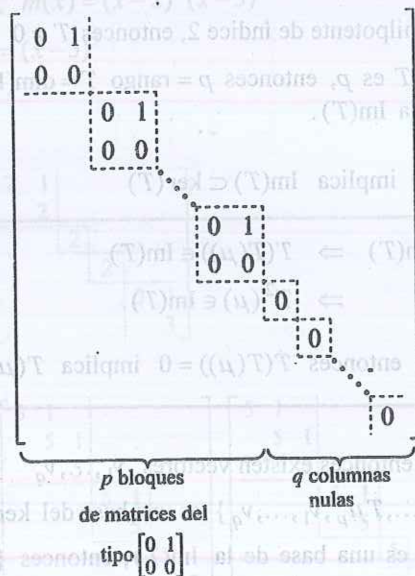
- Si $\operatorname{Im}(T)\subset\ker(T)$, entonces existen vectores $v_1,\dots,v_q$ tales que $A=\{T\mu_1,\dots,T\mu_p,v_1,\dots,v_q\}$ es una base del $\ker(T)$.
- Si $\{T\mu_1,\dots,T\mu_p\}$ es una base de la $\operatorname{Im}(T)$, entonces $\{\mu_1,\dots,\mu_p\}$ es una base de algún subespacio de V.



- Por el lema, deducimos que el conjunto:

$B=\{\mu_1,T\mu_1,\dots,\mu_p,T\mu_p,v_1,\dots,v_q\}$ es una base de V y por tanto, $\dim V=2p+q$.

b) Respecto de la base B, la matriz del operador nilpotente $T:V \longrightarrow V$, de índice 2, está formado por "p" bloques de matrices 2×2 del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a lo largo de la diagonal, seguida de "q" columnas nulas.



CASOS PARTICULARES:

a) Si $T: I\!R^5 \longrightarrow I\!R^5$ es nilpotente de índice 2 y su rango es 2, entonces la matriz de T en la base $B = \{ \underbrace{\mu_1, T\mu_1}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \underbrace{\mu_2, T\mu_2}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \underbrace{v_1}_{[0]} \}$, es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 bloques del tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; una columna nula

$2 = \text{rango de } T = \dim(\text{Im}(T))$
$= \text{dos vectores columnas canónicas}$

b) Si $T: I\!R^5 \longrightarrow I\!R^5$ es nilpotente de índice 2 y su rango es 1, entonces la matriz de T en la base $B = \{ \underbrace{\mu_1, T\mu_2}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \underbrace{v_1}_{[0]}, \underbrace{v_2}_{[0]}, \underbrace{v_3}_{[0]} \}$, es:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1 = \text{rango de } T = \dim(\text{Im}(T))$
$= \text{un vector columna canónico}$

Ejemplo 03. Consideremos un operador nilpotente $T:V \longrightarrow V$ de índice 3. En este caso ocurre lo siguiente.

a) Porque $T^3 = 0$, entonces los vectores $T\mu_1, T^2\mu_2, \ldots, T\mu_p, T^2\mu_p$ son elementos de la base de la $\text{Im}(T)$.

b) Como la restricción de T al subespacio invariante $\text{Im}(T)$ es un operador nilpotente de índice 2, esto es $T^2 = 0$, entonces los vectores $Tv_1, \ldots, Tv_q$, son, también, elementos de la $\text{Im}(T)$.

En consecuencia, una base de la imagen de $(\text{Im}(T))$, es:

$\{T\mu_1, T^2\mu_1, \ldots, T\mu_p, T^2\mu_p, Tv_1, \ldots, Tv_q\}$

c) La condición $T^3 = 0$ implica que los vectores $T^2\mu_1, \ldots, T^2\mu_p$ son elementos de la base del núcleo de T.

La condición $T^2 = 0$ (T restringido a la $\text{Im}(T)$), implica que los vectores $Tv_1, \ldots, Tv_q$ son también elementos de la base del NÚCLEO de T.

Todo esto implica que $\text{Im}(T) \subset \ker(T)$.

Además, existen vectores $w_1, \ldots, w_r$ que son elementos de la base del $\ker(T)$.

Luego, $A = \{T^2\mu_1, \ldots, T^2\mu_p, Tv_1, \ldots, Tv_q, w_1, \ldots, w_r\}$ es una base del $\ker(T)$.

d) Porque $\{T\mu_1, \ldots, T\mu_p\}$ son elementos de V, entonces $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ son elementos de V.

e) Porque $\{Tv_1,\dots,Tv_q\}$ son elementos de V, entonces $\{v_1,\dots,v_q\}$ son elementos de V.

f) En consecuencia, aplicando el Lema, el conjunto:

$$B=\{\underbrace{\mu_1,T\mu_1,T^2\mu_1}_{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}},\dots,\underbrace{\mu_p,T\mu_p,T^2\mu_p}_{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}},\underbrace{v_1,Tv_1}_{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}},\dots,\underbrace{v_q,Tv_q}_{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}},\underbrace{w_1}_{[0]},\dots,\underbrace{w_r}_{[0]}\}$$ es una base de V.

Aquí:
$$\begin{aligned} p &= \text{rango de } T^2\\ 2p+q &= \text{rango de } T\\ p+q+r &= \dim(\ker(T))\end{aligned}$$

Caso Particular: Sea el operador $T:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ de índice 3.

a) Si el rango de T es 3, entonces la matriz, de T en la base B es:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}0&1&0&&\\0&0&1&&\\0&0&0&&\\\hline&&&0&1\\&&&0&0\end{array}\right]$$

b) Si el rango de T es 2, entonces la matriz de T en la base B es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c}0&1&0&&\\0&0&1&&\\0&0&0&&\\\hline&&&0&\\\hline&&&&0\end{array}\right]$$

TEOREMA 11. **Suponer que $T:V\longrightarrow V$ es lineal y que $f(t)=g(t)h(t)$ son polinomios tales que $f(T)=\mathbf{0}$ y $g(t)$ y $h(t)$ son primos entre sí. En este caso, V es la suma directa de los subespacios T-invariantes U y W, con $U=\ker g(T)$ y $W=\ker h(T)$.**

Demostración:

HIPÓTESIS
- $h_1: T:V\longrightarrow V$ es lineal
- $h_2: f(t)=g(t)\,h(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son primos entre si
- $h_3: f(T)=\mathbf{0}$

TESIS: $V=U\oplus W$, donde $U=\ker g(T)$ y $W=\ker h(T)$ son T-invariantes.

Pasos a seguir:

1. En primer lugar probemos que: $\ker g(T)$ y $\ker h(T)$ son T-invariantes.

   Probaré que: $\ker g(T)$ es invariante.

   Para afirmar que $\ker g(T)$ es T-invariante, debo probar que $T(v)\in\ker g(T)$, siendo $g(t)$ un polinomio dado en la hipótesis.

   Veamos:

   Supongamos que $v\in\ker g(T) \Rightarrow g(T)(v)=0$ .... (1)

   Dado que $g(t)t=t\,g(t)$ .... (Producto de polinomios es conmutativo)

   tenemos $g(T)T=T\,g(T)$ es una igualdad de operadores.

   Aplicar en v: $g(T)T(v)=T\,\underbrace{g(T)(v)}_{0}$, ... por (1)

   $=T(0)$ .... [Pero $T(0)=\mathbf{0}$, porque T es operador lineal]

   $g(T)T(v)=0$ .... Definición de T.

   Esta igualdad implica que $T(v)\in\ker(g(T))$

2. La demostración dada en 1. se generaliza: Si $T:V\longrightarrow V$ es un operador lineal y $g(t)$ es cualquier polinomio. El núcleo de $g(T)$ es invariante bajo T.

3. Ahora, demostremos que: $v=u+w$, $u\in U$, $w\in W$

   Veamos:

   Aplicando la definición de polinomios primos entre sí, deducimos:

   - Si $g(t)$ y $h(t)$ son primos entre sí, existes polinomios $r(t)$ y $s(t)$ tales que:

   $$r(t)\,g(t)+s(t)\,h(t)=1$$

   - Para $t=T$ tenemos: $r(T)g(T)+s(T)h(T)=I$ (que es la suma de operadores)
   - Aplicar en v : $r(T)\,g(T)v+s(T)h(T)v=v$ [pues $v=Iv$ operador identidad]

   Debo probar que: $r(T)g(T)v\in W=\ker h(T)$ y $s(T)h(T)v\in U=\ker g(t)$

   Para afirmar que $r(T)g(T)v\in W$, debo probar que $h(T)r(T)g(T)v=0$

♦ Partimos de $h(T)\,r(T)\,g(T)v$, aplicamos la propiedad conmutativa de producto de polinomios y acudimos a las hipótesis h_2 y h_3:

$$h(T)\,r(T)\,g(T)v = r(T)\,\underbrace{g(T)\,h(T)}_{f(T)}\,v$$

$$= r(T)\,\underbrace{f(T)}_{\mathbf{O}}\,v$$

$$= r(T)\,\mathbf{O}v \qquad , \quad \mathbf{O}v = 0 \text{ (operador NULO.)}$$

$$= 0$$

$$h(T)\,r(T)\,g(T)v = 0$$

esta igualdad implica que: $r(T)\,g(T)v \in W = \ker h(T)$

♦ **De manera similar se prueba que: $s(T)\,h(T)v \in U$**

4. Para demostrar que $V = U \oplus W$ (V es la suma directa de U y W.) debemos probar que la suma $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$ esta unívocamente determinada por v.

Veamos:

Primero, probaré que $r(T)\,g(T)v = w$ y luego $s(T)\,h(T)v = u$

Veamos:

♦ Aplicar $r(T)\,g(T)$ a la igualdad $v = u + w$

$r(T)\,g(T)v = r(T)\,\underbrace{g(T)u}_{0} + r(T)\,g(T)w$, donde $g(T)u = 0$ porque $u \in \ker g(T)$

$\Rightarrow r(T)\,g(T)v = r(T)\,g(T)w$ .... (a)

♦ Aplicar $r(T)\,g(T) + s(T)\,h(T) = I$ sobre w y usar $h(T)w = 0$

Veamos:

$$r(T)\,g(T)w + s(T)\,\underbrace{h(T)\,w}_{0} = Iw = w$$

$\Rightarrow r(T)\,g(T)w = w$ .... (b)

Las igualdades obtenidas en (a) y (b) $\begin{cases} r(T)g(T)v = r(T)g(T)w \\ r(T)g(T)w = w \end{cases}$ dan, conjuntamente,

$w = r(T)g(T)v$, lo que quiere decir que w está unívocamente determinado por v.

♦ De manera similar, u está unívocamente determinado por v.

Conclusión: $V = U \oplus W$

TEOREMA 12. Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal y que $f(t) = g(t)h(t)$ es el polinomio minimal de T, donde $g(t)$ y $h(t)$ son primos y mónicos; entonces $g(t)$ y $h(t)$ son los polinomios minimales de las restricciones de T a $\ker g(T) = U$ y $\ker h(T) = W$, respectivamente.

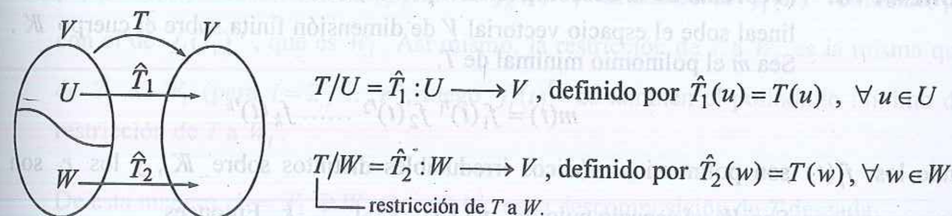
Demostración:

HIPÓTESIS $\begin{cases} h_1)\ T: V \longrightarrow V \text{ es lineal} \\ h_2)\ f(t) = g(t)h(t) \text{, es polinomio minimal de } T \\ \quad \text{donde } g(t) \text{ y } h(t) \text{ son primos y mónicos.} \end{cases}$

TESIS: a) $g(t)$ es el polinomio minimal de la restricción $\hat{T}_1$ de T a U.

b) $h(t)$ es el polinomio minimal de la restricción $\hat{T}_2$ de T a W.

Veamos:



1. Por h_2 se cumple que $f(T) = 0 = g(T)\,h(T) \iff \boxed{g(T) = 0 \lor h(T) = 0}$ ...... (1*)

2. Por h_2 y por el teorema 11, se cumple:

$V = U \oplus W$, donde $\boxed{U = \ker g(T) \text{ y } W = \ker h(T)}$ .... (2*)

3. Por (1*) y (2*) deducimos que $g(t)$ es el polinomio minimal de T restringido a U, esto es $g(\hat{T}_1)=0$, siendo $\hat{T}_1 = T/U$, y $h(t)$ es el polinomio minimal de T restringido a W, esto es $h(\hat{T}_2)=0$, siendo $\hat{T}_2 = T/W$.

Ahora debemos garantizar que $g(t)$ y $h(t)$ son únicos.

4. Suponer que: $m_1(t)$ es el polinomio minimal de $\hat{T}_1$, entonces $m_1(\hat{T}_1)=0$

   $m_2(t)$ es el polinomio minimal de $\hat{T}_2$, entonces $m_2(\hat{T}_2)=0$ (4*)

5. Por los resultados de (4*) y (3) afirmamos que:

   $m_1(t)$ divide a $g(t)$

   y $m_2(t)$ divide a $h(t)$

6. Por otro lado, el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de $m_1(t)$ y $m_2(t)$, esto es $f(t)=m_1(t)\,m_2(t)$ es el polinomio minimal de T.

7. Como $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son primos entre sí, por serlo $g(t)$ y $h(t)$, entonces las igualdades $f(t)=g(t)\,h(t)$ y $f(t)=m_1(t)\,m_2(t)$ implica que $m_1(t)=g(t)$ y $m_2(t)=h(t)$. ■

TEOREMA 13. **(Teorema de la descomposición prima).** Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobe el espacio vectorial V de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea m el polinomio minimal de T.

$$m(t) = f_1(t)^{r_1}\, f_2(t)^{r_2} \;\ldots\ldots\; f_k(t)^{r_k}$$

donde los $f_i(t)$ son polinomios mónicos irreducibles distintos sobre $\mathbb{K}$, y los r_i son enteros positivos. Sea W_i el espacio nulo de $f_i(T)^{r_i}$, $i=1,\ldots,k$. Entonces

a) $V = W_1 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k$.

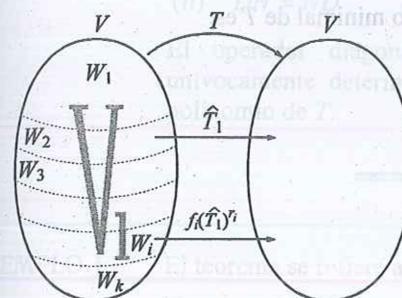
b) Cada E_i es invariante por T.

c) Si T_i es el operador inducido sobre W_i por T, entonces el polinomio mínimo de T_i es $f_i(t)^{r_i}$.

Demostración de (a).

Por inducción sobre k.

- Si $k=1$, es evidente que $W = W_1$.
- Para $k-1$ $(k \geq 2)$, suponer que se cumple: $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k-1}$ (hipótesis inductiva)
- Por el Teorema 11 podemos escribir $W = W_1 \oplus V_1$, donde $W_1 = \ker f_1(T)^{r_1}$, $V_1 = \ker[\,f_2(T)^{r_2} \ldots\ldots f_k(T)^{r_k}\,]$
- Por el Teorema 12, los polinomios minimales de las restricciones de T a W_1 y V_1 son, respectivamente, $f_1(t)^{r_1}$ y $[f_2(t)^{r_2} \ldots f_k(t)^{r_k}]$



- Denotemos la restricción de T a V_1 por $\hat{T}_1$.
- Por hipótesis inductiva V_1 es la suma directa de los subespacios $W_2,\ldots,W_k$ tales que W_i es el núcleo de $f_i(\hat{T}_1)^{r_i}$ y $f_i(t)^{r_i}$ es el polinomio minimal de la restricción de $\hat{T}_1$ a W_i.
- Pero el **NÚCLEO** de $f_i(\hat{T}_1)^{r_i}$ para $i=2,\ldots,r$ está necesariamente contenido en V_1 porque $f_i(t)^{r_i}$ es divisor de $[f_2(t)^{r_2} \ldots f_k(t)^{r_k}]$. El núcleo de $f_i(T)^{r_i}$ coincide, pues, con el de $f_i(\hat{T}_1)^{r_i}$, que es W_i. Así mismo, la restricción de T a W_i es la misma que la de $\hat{T}_1$ a W_i (para $i=2,\ldots,r$), luego $f_i(t)^{r_i}$ es también el polinomio mínimo de la restricción de T a W_i.

  De esta manera, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ es la descomposición de T deseada.

(b) .... *(queda como ejercicio)*

(c) .... *(queda como ejercicio).*

COROLARIO. Si $E_1,\ldots,E_k$ son las proyecciones asociadas de la descomposición prima de T, entonces todo E_i es un polinomio de T, y en consecuencia, si un operador lineal U conmuta con T, entonces U conmuta con cada uno de los E_i; es decir, cada subespacio W_i es invariante por U.

Demostración

HIPÓTESIS
$$\begin{cases} h_1)\ E_1,\ldots,E_k\ ,\ \text{son proyecciones asociadas a la descomposición prima de } T. \\ h_2)\ UT = TU \end{cases}$$

TESIS: $UE_i = E_iU$, es decir, cada subespacio W_i es invariante por U.

- En base al teorema 13, suponer que el polinomio minimal de T es:

  $m(t) = \underbrace{(t-c_1)}_{P_1}{}^{r_1}\ldots\ldots\underbrace{(t-c_k)}_{P_k}{}^{r_k}\ ,\quad P_i = (x-c_i)$

- La imagen de $E_i = W_i = \ker(T-c_iI)^{r_i}$ — espacio nulo.

- Hacer $D = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$ — diagonal.

- Por el teorema 10, D es un operador diagonalizable que se llama la **PARTE DIAGONALIZABLE** de T.

- Considérese el operado $N = T - D$ .... (1)

  Ahora
  $$\left.\begin{aligned} T &= TE_1 + \ldots + TE_k \\ D &= c_1E_1 + \ldots + c_kE_k \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

- (2) en (1): $N = (T-c_1I)E_1 + \ldots + (T-c_kI)E_k$

- Pero $N^2 = (T-c_1I)^2E_1 + \ldots + (T-c_kI)^2E_k$ (Propiedad de las proyecciones)

  En general $N^r = (T-c_1I)^rE_1 + \ldots + (T-c_kI)^rE_k$

- Cuando $r \geq r_i$ para cada i, se tendrá $N^r = 0$, ya que el operador $(T-c_iI)^r$ será entonces O en el recorrido de E_i.

Definición.- Sea $N : V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre el espacio vectorial V. Se dice que N es ***nilpotente*** si existe un entero positivo r tal que $N^r = \theta$.

TEOREMA 14. Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita sobre el cuerpo $I\!K$. Supóngase que el polinomio minimal de T se descompone sobre $I\!K$, en producto de polinomios lineales. Entonces existen un operador diagonalizable D sobre V y un operador N nilpotente sobre V tales que:

(*i*) $T = D + N$

(*ii*) $DN = ND$

El operador diagonalizable D y el operador nilpotente N están unívocamente determinados por (*i*) y (*ii*), y cada uno de ellos es un polinomio de T.

EJEMPLO 1.- El teorema se refiere a las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \quad \lambda I \quad + \quad N$$

donde: λI es diagonal y N es nilpotente.

EJEMPLO 2.- Sea T el operador lineal sobre $I\!R^3$ representado por la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ en la base ordenada canónica.

Demostrar que existe un operador diagonalizable D sobre $I\!R^3$ y un operador nilpotente N sobre $I\!R^3$ tales que $T = D + N$ y $DN = ND$. Hallar las matrices de D y N en la base canónica.

Solución:

1° Hallar el polinomio minimal.

a) El polinomio característico es $P(t)=(t-1)(t-2)^2$

b) El polinomio minimal es $m(t)=(t-1)(t-2)^2$
que en este caso, coincide con $P(t)$

2° Del polinomio minimal $m(t)=\underset{\uparrow\atop f_1(t)}{(t-1)}\ \underset{\uparrow\atop f_2^2(t)}{(t-2)^2}$

Obtenemos los operadores: $f_1(T)=T-I$, $f_2^2(T)=(T-2I)^2$

Además: a) $W_1=\ker(T-I)$

b) $W_2=\ker(T-2I)^2$

3° Del polinomio minimal obtenemos las siguiente matriz diagonal en bloque:

$$J=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 0 & 2 \end{array}\right]$$

donde $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ y $N=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

La matriz J es la forma canónica de Jordan.

EJEMPLO 3.- Determine todas las formas canónicas de Jordan posibles para una matriz de orden 5 cuyo polinomio minimal sea $m(t)=(t-3)^2$.

Solución:

El teorema 13, entre otras cosas, nos indica que: Sea $T:V\longrightarrow V$ un operador lineal cuyos polinomios característico y minimal son, respectivamente,

$$f(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\ldots(t-\lambda_k)^{n_k} \quad \text{y} \quad m(t)=(t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\ldots(t-\lambda_r)^{r_k}$$

done los λ_i son escalares distintos (valores propios de T). Entonces T tiene una representación **MATRICIAL DIAGONAL POR BLOQUES** J. Cada bloque J_{ij} tiene la forma

$$J_{ij}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1\cdots\cdots 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \vdots & & 1 & 0\\ 0 & 0\cdots\cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0\cdots\cdots & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}=\lambda_i I+N$$

N — matriz nilpotente
$\lambda_i I$ — matriz diagonal

Por cada λ_i los bloques correspondientes J_{ij} tienen las siguientes propiedades:

1) Existe al menos un J_{ij} de orden r_i ; todos los demás J_{ij} son de orden $\le r_i$.

2) La suma de los ordenes de los J_{ij} es n_i .

3) el número de los J_{ij} coincide con la multiplicidad geométrica de λ_i .

4) El número de los J_{ij} de cada orden posible está unívocamente determinado por T.

Solución del ejemplo 3.

$$J=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 3&1&&&\\ 0&3&&&\\ \hline &&3&1&\\ &&0&3&\\ \hline &&&&3 \end{array}\right] \quad \text{ó} \quad J=\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 3&1&&&\\ 0&3&&&\\ \hline &&3&&\\ \hline &&&3&\\ \hline &&&&3 \end{array}\right]$$

EJEMPLO 4.- Supongamos que los polinomios característico y minimal de T son respectivamente:

$$P(t)=(t-5)^4(t-2)^3 \quad \text{y} \quad m(t)=(t-5)^2(t-2)^2$$

La forma **CANÓNICA DE JORDAN** de T es una de las matrices.

$$J=\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} 5&1&&&&&\\ 0&5&&&&&\\ \hline &&5&1&&&\\ &&0&5&&&\\ \hline &&&&2&1&\\ &&&&0&2&\\ \hline &&&&&&2 \end{array}\right] \quad \text{o} \quad j=\left[\begin{array}{cc|c|c|cc|c} 5&1&&&&&\\ 0&5&&&&&\\ \hline &&5&&&&\\ \hline &&&5&&&\\ \hline &&&&2&1&\\ &&&&0&2&\\ \hline &&&&&&2 \end{array}\right]$$

EJEMPLO 5.- En cada uno de los siguientes casos, sea T el operador lineal sobre $I\!R^2$ representada por A en la base ordenada canónica de $I\!R^2$ y sea U el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ representado por A en la base ordenada canónica. Encontrar el polinomio característico de T y de U, hallar los valores propios de cada operador y para cada uno de teles valores propios C hallar una base para el correspondiente espacio de vectores característicos. Hallar una matriz canónica.

a) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

Solución: Datos: $T: I\!R^2 \to I\!R^2$ y $U:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$

a) 1° Hallar los valores propios de A:

$$\lambda^2-2=0 \longleftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \quad \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$$

2° Valores propios para T son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

3° El vector propio para $\lambda_1=0$, se halla resolviendo $(A-0I)=V_1=0$ y se obtiene.

$$V_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};SP_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

4° El vector propio para $\lambda_2=1$, se halla resolviendo $(A-I)=V_2=0$ y se obtiene.

$$V_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};SP_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Además: $P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ y $\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

es la matriz canónica. $\overline{A}$ es la matriz en la base $\beta=\{V_1,V_2\}$.

b) 1° Hallar los valores propios de A:

$$\lambda^2-3\lambda+5=0 \quad \lambda_1=\tfrac{3}{2}+i\tfrac{\sqrt{11}}{2},\ \lambda_2=\tfrac{3}{2}-i\tfrac{\sqrt{11}}{2}$$

2° T no tiene valores propios.

3° Los valores propios de U son λ_1 y λ_2.

4° Los vectores propios V_1 y V_2 se hallan resolviendo la ecuación:

$$\left[A-\left(\tfrac{3}{2}+i\tfrac{\sqrt{11}}{2}\right)I\right]Z=0,\ Z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

Se reduce a una sola ecuación:

$$z_1=\left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{11}}{2}\right)z_2.$$

Luego:

$$Z=\begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}\right)z_2\\z_2\end{bmatrix}=z_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}+i\,z_2\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{2}\\0\end{bmatrix}$$

Entonces el subespacio vectorial generado por el valor propio $\lambda\ \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$ donde $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{11}}{2}$, $\beta>0$ es $SP_\lambda=\mathfrak{L}\{V_1,V_2\}$.

La matriz que nos permite hallar la matriz canónica es $P=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$

La matriz canónica es:

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{\sqrt{11}}{2}\\\frac{\sqrt{11}}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Afirmamos que $\overline{A}$ es la matriz del operador $U:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ en la base $\beta=\{V_1,V_2\}$.

c) 1° Los valores propios de A se hallan resolviendo la ecuación: $\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=2$. Los valores propios para $T: I\!R^2\to I\!R^2$ son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$.

2° El vector propio asociado a $\lambda_1=0$ es

$$U=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ SP_{\lambda_1}=\mathfrak{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

3° El vector propio asociado a $\lambda_2=2$ es

$$V=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ SP_{\lambda_2}=\mathfrak{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

4° $P=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$.

5° La matriz canónica es $\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 1 (VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS)

01 Sea x un vector propio de una transformación lineal φ, perteneciente al valor propio λ, y sea $f(t)$ un polinomio. Demostrar que el mismo vector x es un valor propio de la transformación $f(\varphi)$, perteneciente al valor propio $f(\lambda)$. En otras palabras, demostrar que $\varphi x=\lambda x$ implica que $f(\varphi)x=f(\lambda)x$.

02 Sea $T:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ un operador lineal sobre $\mathbb{C}$, donde $A=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$ es la matriz de T en la base canónica. Hallar los vectores propios de T.

Respuesta: $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$.

Hallar los valores propios y los vectores propios de las transformaciones lineales, dadas en cierta base por las matrices.

03 $\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ **04** $\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{bmatrix}$ **05** $\begin{bmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{bmatrix}$ **06** $\begin{bmatrix}1&-3&-3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{bmatrix}$

07 $\begin{bmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{bmatrix}$ **08** $\begin{bmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{bmatrix}$ **09** $\begin{bmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{bmatrix}$ **10** $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ **12** $\begin{bmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{bmatrix}$

Respuestas:

03 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, vector propio $c(1,1,-1)$, $c\neq 0$

04 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, vectores propios: $c_1(1,2,0)+c_2(0,0,1)$, donde c_1 y c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

05 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ son de la forma $c(1,1,1)$, y para $\lambda = 0$, de la forma $c(1,2,3)$, donde $c \neq 0$.

06 $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Los vectores propios son de la forma $c(3,1,1)$, donde $c \neq 0$.

07 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Los vectores propios para $\lambda = 3$ son de la forma $c(1,2,2)$, y para $\lambda = -1$, de la forma $c(1,2,1)$, donde $c \neq 0$.

08 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ son de la forma $c_1(2,1,0)+c_2(1,0,-1)$; y para $\lambda = -1$, de la forma $c(3,5,6)$, done c_1 y c_2 no son simultáneamente iguales a cero y $c \neq 0$.

09 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ son de la forma $c(1,2,1)$; para $\lambda = 2+3i$, de la forma $c(3-3i,5-3i,4)$; para $\lambda = 2-3i$, de la forma $c(3+3i,5+3i,4)$.

10 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ son de la forma $c(0,0,0,1)$, y para $\lambda = 0$, de la forma $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, donde $c \neq 0$ y c_1 y c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

11 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ son de la forma $c_1(1,0,1,0)+c_2(0,0,0,1)$ y para $\lambda = 0$, de la forma $c_1(0,1,0,0)+c_2(0,0,1,0)$, donde los números c_1 y c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

12 $\lambda = 2$. Los vectores propios son de la forma $c_1(1,1,-1,0)+c_2(1,1,0,1)$, donde c_1 y c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

En los problemas del 13 al 19 suponer que los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

13 Demostrar que los valores propios de A^t son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

14 Demostrar que los valores propios de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k$.

15 Demostrar que A^{-1} existe si, y sólo si $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k \neq 0$.

16 Si A^{-1} existe, demuestre que sus valores característicos son $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$

17 Demuestre que la matriz $A - \alpha I$ tiene los valores característicos $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots, \lambda_k - \alpha$

18 Demostrar que los valores propios de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$.

19 Demostrar que los valores característicos de A^m son $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m$ para $m = 1,2,3,\ldots$

20 Decimos que A y B son matrices semejantes, si existe una matriz no singular P tal que, $B = P^{-1}AP$.

Si las matrices A y B son semejantes, probar que A y B tienen los mismos valores propios.

21 Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

a) Encuentre los valores propios reales y los vectores propios de B.

b) Encuentre las matrices no singulares P y P^{-1} y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}BD$.

Respuesta:

a) Al valor propio $\lambda_1 = 1$ corresponde el subespacio propio $S_{\lambda_1} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ al valor propio $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ corresponde el subespacio propio $S_{\lambda_2} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $D = P^{-1}BP$

22 Si A es una matriz 4×4, determine si A es:

i) definidamente semejante a una matriz diagonal.
ii) posiblemente semejante a una matriz diagonal, o
iii) Definidamente no semejante a una matriz diagonal, si la ecuación característica de A es.

a) $\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)(\lambda+5)=0$

b) $(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

c) $\lambda^4+1=0$

d) $(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)=0$

Respuesta: a) (*i*) , b) (*ii*) , c) (*iii*) , d) (*i*)

23 ¿Cuales son los valores propios de la matriz cero $n\times n$? ¿Cuáles son los vectores propios de la matriz cero? ¿Es la matriz cero diagonalizable?

Respuesta: **0** es el único valor propio. Todo vector no nulo es un vector propio perteneciente a **0**. Cualquier base para $I\!R^n$ es una base de vectores propios para la matriz cero.

24 Si $A=\begin{bmatrix}2&-3&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

a) Encuentre los valores propios y los vectores propios de A.

b) Encuentre la matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

Respuestas:

a) $\lambda_1=2$; $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$; $\lambda_2=-1$; $v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$; $\lambda_3=4$; $v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

b) $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}=P^{-1}AP$, $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

25 En el modelo de condiciones de trabajo de una máquina, tenemos $AX_{t-1}=X_t$, para cualquier entero positivo t. Use inducción matemática para verificar que $A^nX_0=X_n$ para todo entero positivo n.

26 Con A como el problema 25 (A se llama la matriz de probabilidad de transición).

a) Encuentre que 1, $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$ son los valores propios de A y por tanto que A es diagonalizable.

b) Encuentre los vectores propios de A y seleccione de ellos la base $C_2=\{Y_1,Y_2,Y_3\}$, donde $Y_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $Y_2=\begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix}$, $Y_3=\begin{bmatrix}-7\\4\\3\end{bmatrix}$

c) Encuentre la matriz P para el cambio de la base de C_2 a la base natural C_1 para $I\!R^3$, encuentre P^{-1} y muestre que $D=P^{-1}AP$ es la matriz diagonal, $diag\left(1,\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$.

d) Encuentre $A^n=P^{-1}D^nP$ y demuestre que:

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 1-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{7}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^n & 1+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{7}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n\\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n & -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^n\\ 0 & -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^n & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n\end{bmatrix}$$

e) A medida que el número de períodos de tiempo $n\longrightarrow+\infty$, ¿Cuál es el valor límite de A^n? Interprete su resultado.

Respuesta:

a) $p(\lambda)=(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda+\frac{5}{36}\right)$

c) $P=\begin{bmatrix}1&1&-7\\0&-4&4\\0&3&3\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-\frac{1}{8}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{8}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

e) El valor límite de A es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Después de un tiempo largo es cierto que una máquina estará dañada sin reparación independientemente de su condición inicial.

GRUPO 02

01 Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $I\!K$ entonces $T \in \text{Hom}(V,V)$ es inversible si, y sólo si, el término constante del polinomio minimal para T no es cero.

02 Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \text{Hom}(V,V)$ es inversible, entonces T^{-1} es una expresión polinomial en T sobre $I\!K$.
(sugerencia: aplicar 1).

03 El elemento $T \in \text{Hom}(V,V)$ se llama nilpotente si $T^m = 0$ para algún m. Si T es nilpotente y si $Tv = \alpha v$ para algún $v \neq 0$ en V, con $\alpha \in I\!K$. Pruébese que $\alpha = 0$.

04 Si $T \in \text{Hom}(V,V)$ es nilpotente, pruébese que $\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \ldots + \alpha_k T^k$ es inversible, con tal de que sea $\alpha_0 \neq 0$.

05 Sea V un espacio vectorial bidimensional sobre $I\!K$ con base ordenada $\{v_1, v_2\}$. Supongamos que $T \in \text{Hom}(V,V)$ es tal que $Tv_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y $Tv_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I\!K$. Encuéntrese un polinomio distinto de cero en $I\!K[x]$ de grado 2 satisfecho por T.

06 Sea V un espacio vectorial bidimensional sobre el campo $I\!K$ de los números reales con base ordenada $\{v_1, v_2\}$. Encuéntrese las raíces características y los correspondientes vectores característicos para los siguientes operadores T:

a) $Tv_1 = v_1 + v_2$, $Tv_2 = v_1 - v_2$
b) $Tv_1 = 5v_1 + 6v_2$, $Tv_2 = -7v_2$
c) $Tv_1 = v_1 + 2v_2$, $Tv_2 = 3v_1 + 6v_2$

07 Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en $I\!K$. Defínase T en V por $T(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) = \alpha_0(x+1) + \alpha_2(x+1)^2 + \alpha_3(x+1)^3$.

Calcúlese la matriz de T en las bases:

a) $1, x, x^2, x^3$.
b) $1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3$
c) Si la matriz de la parte (a) es A y la matriz en la parte (b) es B, encuéntrese una matriz C tal que $B = C A C^{-1}$.

08 Sea $V = I\!R^3$ y supóngase que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es la matriz de $T \in \text{Hom}(V,V)$ en la base canónica.

Encuéntrese la matriz de T en las bases: a) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$
b) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,2,1)$

09 Sea la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que para todo i, $\sum_j a_{ij} = 1$. Pruébese que 1 es un valor propio de A.

10 Sea la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que para todo j, $\sum_i a_{ij} = 1$. Pruébese que 1 es valor propio de A (es decir, $A - I$ no es inversible).

11 Encuéntrese las condiciones necesarias y suficientes, que α, β, γ y δ han de cumplir para que $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ sea inversible. Para los casos en que A es inversible, escríbase A^{-1} explícitamente.

12 Si $E \in I\!K^{n \times n}$ es tal que $E^2 = E \neq 0$, pruébese que hay una matriz $C \in I\!K^{n \times n}$ tal que:

$$C E C^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

donde la matriz unidad en la parte superior izquierda es $r \times r$, donde r es el rango de E.

13 Proporciónese una prueba, usando cálculo matricial, que si A es una matriz triangular $n \times n$ con entradas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sobre la diagonal, entonces:

$$(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)\ldots(A-\lambda_n)=0 .$$

14 Si $T \in \text{Hom}(V,V)$ y si $\lambda \in I\!K$ es una raíz característica de T en $I\!K$, sea: $U_\lambda = \{v \in V / Tv = \lambda v\}$. Si $S \in \text{Hom}(V,V)$ conmuta con T, pruébese que U_λ es invariante bajo S.

15 Si $\mathcal{M}$ es el conjunto conmutativo de elementos en $\text{Hom}(V,V)$ tales que $M \in \mathcal{M}$ tiene todas sus raíces características en $I\!K$, pruébese que hay un $C \in \text{Hom}(V,V)$ tal que CMC^{-1}, para $M \in \mathcal{M}$ está en forma triangular.

GRUPO 03 (FORMAS CANÓNICAS ELEMENTALES)

01 Si S y T son transformaciones lineales nilpotentes, que conmutan, pruébese que ST y $S+T$ son transformaciones lineales nilpotentes.

02 Si $T \in \text{Hom}(V,V)$ es nilpotente entonces $\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_m T^m$ donde los $\alpha_i \in I\!K$, es inversible si $\alpha_0 \neq 0$.

03 Teorema: Si $T \in \text{Hom}(V,V)$ es nilpotente de índice de nilpotencia n_1, entonces puede encontrarse una base de V tal que la matriz de T en esta base tenga la forma:

$$\begin{bmatrix} M_{n_1} & \cdots & 0 \\ & M_{n_2} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & M_{n_r} \end{bmatrix}$$

donde $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$, y donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = \dim V = n$

Definición.- Los enteros $n_1, n_2, \ldots, n_r$ se llaman las ***invariantes*** de T.

Problemas a) Pruébese que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es nilpotente y encuentre sus invariantes y forma de Jordan.

b) Pruébese que la matriz de la parte (a) no es semejante a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

04 Pruébese que la matriz $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con entrada 1 en la subdiagonal y o todas las demás, es semejante a M_n (matriz $n \times n$)

05 Si $I\!K$ tiene característica $p > 0$ pruébese que $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisface $A^p = I$.

06 Si $I\!K$ tiene característica 0, pruebe que $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisface $A^m = I$ para $m > 0$ solamente si $\alpha = 0$.

07 Encuéntrese todas las formas de Jordan posibles para:

a) Todas las matrices 8×8 que tienen $x^2(x-1)^3$ como polinomio mínimo.

b) Todas las matrices 10×10 sobre un campo de características diferentes de 2, que tiene $x^2(x-1)^2(x+1)^3$ como polinomio mínimo.

08 Pruebe que la matriz $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{bmatrix}$$

es semejante a $\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$

si la característica de $I\!K$ es 0 o si es p y $p \times n$. ¿Cuál es la multiplicidad de 0 como raíz característica de A?

09 Si T está en $\text{Hom}(V,V)$ entonces T es diagonalizable (si todas sus raíces características están en $I\!K$) si, y sólo si siempre que $(T-\lambda)^m v = 0$, para $v \in V$ y $\lambda \in I\!K$, entonces $(T-\lambda)v = 0$.

10 Usando el resultado del problema 9, pruébese que $E^2 = E$ entonces E es diagonalizable.

CAPÍTULO **6**

LAS FORMAS RACIONAL Y DE JORDAN

6.1 SUBESPACIOS CÍCLICOS

Definición.- Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal en el espacio V de dimensión finita. Si v es cualquier vector de V con $v \neq 0$, el conjunto de los vectores de la forma $f(T)v$, donde $f(t)$ es un polinomio sobre $I\!K$, es un subespacio T-invariante de V denominado el SUBESPACIO *T-CICLICO* de V generado por v.

Notación: $Z(v;T) = \{ f(T)v : f(t) \in I\!K[t], v \in V \text{ con } v \neq 0\}$

Si $Z(v,T) = V$ entonces se dice que v es un ***vector cíclico de T***.

Dado el operador T y un vector $v \neq 0$ formemos la sucesión:

$$v, Tv, T^2v, T^3v, \ldots\ldots, T^{k-1}v, T^kv, T^{k+1}v, \ldots$$

de potencias de T actuando sobre v. Sea k el menor entero tal que T^kv es combinación lineal de los vectores que lo preceden en la sucesión, digamos

$$T^kv = -a_{k-1}T^{k-1}v - a_{k-2}T^{k-2}v - \ldots - a_1Tv - a_0v$$

de donde $\quad T^kv + a_{k-1}T^{k-1}v + \ldots + a_1Tv + a_0v = 0$

Esta igualdad nos indica que T anula al polinomio: $m(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1t + a_0$

El único polinomio mónico $m(t)$ de grado mínimo para el que $m(T) = 0$, se llama T-aniquilador de v y $Z(v;T)$ o T-anulador.

De lo hecho, deducimos.

1. El conjunto $\{v, Tv, T^2v, \ldots, T^{k-1}v\}$ es una base de $Z(v;T)$, luego $\dim Z(v;T) = k$.
2. El polinomio minimal de T restringido al subespacio $Z(v;T)$ es $m(t)$.

3. La matriz acompañante de $m(t)=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+a_{k-2}t^{k-2}+\ldots+a_1t+a_0$ es:

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\cdots 0\cdots 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0\cdots 0\cdots 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0\cdots 0\cdots 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 0\cdots 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

C es una matriz cuadrada de orden k, donde la última columna son los coeficientes $a_0,a_1,a_2,a_3\ldots a_{k-1}$ con signo cambiado y todos los elementos de la subdiagonal son 1.

C es la representación matricial de T restringido al subespacio $Z(v;T)$ en la base $\{v,Tv,\ldots,T^kv\}$

Ejemplo 01.

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ la matriz del operador $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base canónica.

Sea $v=(1,0)$, no nulo, de $V=\mathbb{R}^2$.

Se pide:
a) Generar la sucesión $Z(v;T)$.
b) Hallar el polinomio minimal de T restringida a $Z(v;T)$.
c) Hallar una base de $Z(v;T)$ y la dimensión de $Z(v;T)$.
d) Hallar la matriz acompañante del polinomio minimal.

Solución:

a) $Z(v;T)=\{v,Tv,T^2v,T^3v,\ldots\}$

Tv se halla multiplicando A por v : $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

T^2v se halla multiplicando A^2 por v : $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 6 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$

T^3v se halla multiplicando A^3 por v : $\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}$

Con la transpuesta de cada matriz obtenida, se forma la sucesión:

$$Z(v;T)=\{\underset{v}{(1,0)},\underset{Tv}{(1,3)},\underset{T^2v}{(-2,6)},\underset{T^3v}{(-8,0)},\ldots\}$$

b) Elegir el vector T^2v y expresarlo como combinación lineal de los vectores Tv y v.

Así: $\underbrace{T^2v}=-a_1\underbrace{Tv}-a_0\underbrace{v}$

$(-2,6)=2(1,3)-4(1,0)$, donde $\begin{cases}a_1=-2\\ a_0=4\end{cases}$

$T^2v-2Tv+4v=0$

de aquí se obtiene el polinomio $m(t)=t^2-2t+4$, que es el minimal de T restringido al subespacio $Z(v;T)$ y se llama el T-aniquilador o T-anulador de $v=(1,0)$ y $Z((1,0),T)$.

c) Una base de $Z(v;T)$ es $B=\{\underset{v}{(1,0)},\underset{Tv}{(1,3)}\}$, luego $\dim Z(v;T)=2$

d) La matriz acompañante de $m(t)=t^2-2t+4$, es: $C=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

C es la representación matricial de T restringido al subespacio $Z(v;T)$ en la base $\{(1,0),(1,3)\}$.

FORMA ALGEBRAICA DE OBTENER LA MATRIZ *C*.

Teniendo el operador $T(x,y)=(x-y,3x+y)$ y la base $B=\{(1,0),(1,3)\}$, la matriz de T en la base ordenada B, se obtiene del siguiente modo:

$$T(1,0)=(1,3)=\underset{0}{\underbrace{C_{11}}}(1,0)+\underset{1}{\underbrace{C_{21}}}(1,3)$$

$$T(1,3)=(-2,6)=\underset{-4}{\underbrace{C_{12}}}(1,0)+\underset{2}{\underbrace{C_{22}}}(1,3)$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Ejemplo 02. (forma canónica racional)

Ahora, ampliemos el ejemplo 1, eligiendo el polinomio minimal $m(t)=(t^2-2t+4)(t-2)^3$ de un operador lineal $T:V\longrightarrow V$ en el cual $\dim V=7$ y V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ¿Qué forma tendrá la representación matricial de T?

Si cada factor del polinomio minimal es mónico, irreducible, no lineal, repetido o no, tendrá su respectiva matriz acompañante. Cada matriz acompañante se coloca, como bloque, en forma de diagonal para obtener la matriz de T. Esta matriz diagonal por bloques recibe el nombre de **FORMA CANÓNICA RACIONAL.**

En el ejemplo 2, tenemos: $\dim V = 7$ y el polinomio minimal.

$$m(t) = \underbrace{(t^2-2t+4)}_{f_1^1(t)}\underbrace{(t-2)^3}_{f_2^3(t)}$$

donde $f_1(t) = t^2-2t+4$ y $f_2(t) = t-2$ son polinomios mónicos irreducibles.

Teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones, obtenemos la forma canónica racional de T.

1. La suma de los grados de las matrices acompañantes debe dar 7.
2. Una matriz acompañante debe salir de t^2-2t+4 y otra de $(t-2)^3$, siendo así, la forma canónica racional de T es exactamente una de las siguientes sumas directas de matrices acompañantes.

(1) $C(t^2-2t+4)\oplus C(t^2-2t+4)\oplus \underbrace{C((t-2)^3)}_{t^3-6t^2+12t-8} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 0 & -4 & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 8 \\ & & & & 1 & 0 & -12 \\ & & & & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

donde $C_{11} = C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_1(t) = t^2-2t+4$ y

$C_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_2^3(t) = (t-2)^3 = t^2-6t^2+12t-8$.

(2) $C(t^2-2t+4)\oplus C((t-2)^3)\oplus \underbrace{C((t-2)^2)}_{t^2-4t+4} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 8 & & \\ & & 1 & 0 & -12 & & \\ & & 0 & 1 & 6 & & \\ & & & & & 0 & -4 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$

donde:

$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_1(t) = t^2-2t+4$

$C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_2^3(t) = t^3-6t^2+12t-8$

$C_{33} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_2^2(t) = t^2-4t+4$

(3) $C(t^2-2t+4)\oplus C((t-2)^3)\oplus C(t-2)\oplus C(t-2) \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 8 & & \\ & & 1 & 0 & -12 & & \\ & & 0 & 1 & 6 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$

donde:

$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_1(t) = t^2-2t+4$

$C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f_2^3(t) = t^3-6t^2+12t-8$

$C_{33} = [2]$ es la matriz acompañante de $f_2(t) = t-2$

$C_{44} = [2]$ es la matriz acompañante de $f_2(t) = t-2$

Ejemplo 03. Sea V un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $I\!R$ y $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal cuyo polinomio mínimo es $m(t) = (t-2)^3$.

La ***forma canónica racional*** de T es una de las sumas directas de matrices acompañantes.

1) $\underbrace{C((t-2)^3)}_{t^3-6t^2+12t-8}\oplus \underbrace{C((t-2)^2)}_{t^2-4t+4} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & & \\ 1 & 0 & -12 & & \\ 0 & 1 & 6 & & \\ & & & 0 & -4 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$

donde:

$C_1=\begin{bmatrix}0&0&8\\1&0&-12\\0&1&6\end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f^3(t)=t^3-6t^2+12t-8$, siendo $f(t)=t-2$

$C_2=\begin{bmatrix}0&-4\\1&4\end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f^2(t)=t^2-4t+4$

2) $C((t-2)^3)\oplus C(t-2)\oplus C(t-2) \Rightarrow C=\begin{bmatrix}0&0&8&&\\1&0&-12&&\\0&1&6&&\\&&&2&\\&&&&2\end{bmatrix}$

donde:

$C_1=\begin{bmatrix}0&0&8\\1&0&-12\\0&1&6\end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $f^3(t)=t^3-6t^2+12t-8$

$C_2=[2]$ es la matriz acompañante de $f(t)=t-2$

$C_3=[2]$ es la matriz acompañante de $f(t)=t-2$

TEOREMA 1.-

Dado un operador lineal $T:V\longrightarrow V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$.

Definamos:

1. $Z(v;T)=\{f(T)v: f(t)\in \mathbb{K}[t], v\neq 0, v\in V\}$ como el subespacio T-cíclico generado por v.
2. T_v la restricción de T a $Z(v;T)$. Es decir $T_v(w)=T(w)$ para todo $w\in Z(v;T)$.
3. $m_v(t)$ el T-anulador de v y $Z(v;T)$.

   Es decir $m_v(T)(v)=0$

   $\underbrace{T^k(v)+a_{k-1}T^{k-1}(v)+\ldots+a_1T(v)+a_0v=0}$

   Se cumple:

   i) El conjunto $\{v,Tv,T^2v,\ldots,T^{k-1}v\}$ es una base de $Z(v;T)$, luego $\dim Z(v;T)=k$.

   ii) El polinomio minimal de T_v es $m_v(t)=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$.

iii) La representación matricial de T_v en la base anterior es la matriz acompañante de $m_v(t)=t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0$.

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&-a_0\\1&0&0&\cdots&-a_1\\0&1&0&\cdots&-a_2\\0&0&1&\cdots&-a_3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_{k-2}\\0&0&0&\cdots&1-a_{k-1}\end{bmatrix}$$

Demostración de (*i*)

Para afirmar que $\{v,Tv,\ldots,T^{k-1}v\}$ es una base de $Z(v;T)$ debo probar dos cosas:

1º $\{v,Tv,\ldots,T^{k-1}v\}$ es el conjunto máximo de vectores linealmente independiente.

2º Cualquier vector de V es combinación lineal de los vectores $\{v,Tv,\ldots,T^{k-1}v\}$

Veamos:

1. Por definición de $m_v(t)$, tenemos que T^kv es el primer vector de la sucesión $v,Tv,\ldots,T^{k-1}v,T^kv,T^{k+1}v,\ldots$ que es combinación lineal de los vectores $T^{k-1}v,\ldots,Tv,v$; Luego el conjunto $\mathcal{B}=\{v,Tv,\ldots,T^{k-1}v\}$ es linealmente independiente.
2. Denotemos por $\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ al siguiente conjunto $\mathfrak{L}(\mathcal{B})=\{w\in V: w$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}\}$. Ahora, debemos probar que $\mathfrak{L}(\mathcal{B})=Z(v;T)$.

   Veamos:
3. Por inducción, probar que $T^nv\in\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ para todo n.
   - Si $n=k$, se cumple que $T^kv\in\mathfrak{L}(\mathcal{B})$.
   - Para $n>k$, suponer que el vector $T^{n-1}v\in\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ (hipótesis inductiva), esto es, que $T^{n-1}v$ es combinación lineal de $v,Tv,\ldots,T^{k-1}v$; que escribimos así: $T^{n-1}v=b_{k-1}T^{k-1}v+\ldots+b_1Tv+b_0v$.

Pero $T^n v = T(T^{n-1}v) = T(b_{k-1}T^{k-1}v + \ldots + b_1 Tv + b_0 v)$

$$= b_{k-1}T^k v + \ldots + b_1 T^2 v + b_0 Tv$$

Pero $T^k v \in \mathfrak{L}(\mathcal{B})$, entonces $T^n v \in \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ para todo n. Por lo tanto, $f(T)(v) \in \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ para todo polinomio $f(t)$. Siendo así, se cumple $Z(v,T) = \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ y por tanto $\mathcal{B}$ es una base.

Demostración de *(ii)*

Bajo el supuesto que $m(t) = t^s + b_{s-1}t^{s-1} + \ldots + b_1 t + b_0$ es el polinomio minimal de T_v y teniendo $m_v(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$; debemos probar que $s = k$.

Para ello, probar que $s \leq k$ y $k \leq s$.

Veamos:

Al suponer que $m(t) = t^s + b_{s-1}t^{s-1} + \ldots + b_1 t + b_0$ es el polinomio mínimo de T_v y dado que $v \in Z(v;T)$, tendremos que:

$$0 = m(T_v)(v) = m(T)(v) = T^s(v) + b_{s-1}T^{s-1}(v) + \ldots + b_0 v$$

Esta igualdad, expresa que $T^s(v)$ es combinación lineal de $v, T(v), \ldots, T^{s-1}(v)$ y por consiguiente $k \leq s$.

- Por otro lado, se tiene que $m_v(T) = 0$ y así $m_v(T_v) = 0$. Entonces $m(t)$ es divisor de $m_v(t)$ y por esta razón $s \leq k$. Así tendremos que $k = s$ y por tanto $m_v(t) = m(t)$.

Demostración de *iii)*

Lo que haremos, es aplicar el operador T_v a los vectores:

$$v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v), T^k(v)$$

Así tendremos:

$$\begin{array}{lcccccc}
T_v(v) = & 0 & T(v) & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
T_vT(v) = & 0 & 0 & T^2(v) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
T_v(T^2(v)) = & 0 & 0 & 0 & T^3(v) & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
T_v(T^{k-2}(v)) = & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & T^{k-1}(v) \\
T_v(T^{k-1}(v)) = & -a_0T(v) & -a_1T(v) & -a_2T^2(v) & \cdots\cdots & & -a_{k-1}T^{k-1}(v)
\end{array}$$

Por definición, la matriz de T_v en la base $\mathcal{B}$ es la transpuesta de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones precedente. Así se obtiene la matriz C.

FORMA RACIONAL

Cuando el polinomio minimal de un operador $T : V \longrightarrow V$ no puede factorizarse en polinomios lineales, entonces la matriz de T, en la base de cada subespacio $Z(v_i, T)$, se puede presentar en forma canónica racional.

LEMA.- Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal cuyo polinomio minimal es $f(t)^n$, donde $f(t)$ es un polinomio irreducible mónico. Entonces V es la suma directa:

$$V = Z(v_1, T) \oplus \ldots \oplus Z(V_r, T)$$

de SUBESPACIOS T-cíclicos $Z(v_i;T)$ con sus respectivos T-anuladores

$$f(t)^{n_1}, f(t)^{n_2}, \ldots, f(t)^{n_r} \qquad n = n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$$

Cualquier otra descomposición de V en subespacios T-cíclicos tiene el mismo número de componentes y el mismo número de T-aniquiladores. Ver el ejemplo 3.

TEOREMA 2. (Teorema de descomposición cíclica)

Sea $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, con polinomio minimal.

$$m(t) = f_1(t)^{m_1} f_2(t)^{m_2} \ldots f_s(t)^{m_s}$$

donde los $f_i(t)$ son polinomios irreducibles mónicos distintos. En este caso, T tiene una única representación ***matricial diagonal por bloque.***

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{1r1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_{s1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & C_{sr_s} \end{bmatrix}$$

donde las C_{ij} son las matrices acompañantes de los polinomios $f_i(t)^{n_{ij}}$, con

$$m_1 = n_{11} \geq n_{12} \geq \ldots \geq n_{1r_1}, \ldots, m_s = n_{s1} \geq n_{s2} \geq \ldots \geq n_{sr_s}$$

La matriz C, que es la representación matricial de T, se llama la forma CANÓNICA RACIONAL de T. Los polinomios $f_i(t)^{n_{ij}}$ se conocen como divisores elementales de T.

Ver el ejemplo 2.

OBSERVACIONES:

1. Por el teorema 2, existen vectores no nulos $v_1, \ldots, v_s$ en V con T-anuladores respectivos $f_1(t)^{m_1}, \ldots, f_s(t)^{m_s}$, tales que $V = W_0 \oplus Z(v_1;T) \oplus \ldots \oplus Z(v_s;T)$, donde W_0 es un subespacio propio T-admisible de V.
2. ***Definición.-*** Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal y sea W un subespacio de V. Se dice que W es T-admisible, si
   i) W es invariante por T.
   ii) Si $f(T)v$ está en W, existe un vector w en W tal que $f(T)v = f(T)w$.

Ejemplo 04. Hallar la forma racional para el bloque de Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Solución:

En primer lugar, hallemos el polinomio característico de la matriz J.

El polinomio característico de J es $P(x) = (x-\lambda)^4$.

En segundo lugar, desarrollar $P(x) = x^4 - 4\lambda x^3 + 6\lambda^2 x^2 - 4\lambda^3 x + \lambda^4$.

En tercer lugar, escribir la matriz acompañante del polinomio $P(x)$, que es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^4 \\ 1 & 0 & 0 & 4\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4\lambda \end{bmatrix}$$ es la forma racional de la matriz J.

Ejemplo 05. Sea A una matriz 4×4 con polinomio mínimo $m(t) = (t^2+1)(t^2-3)$.
Hallar la forma canónica racional de A si A es una matriz sobre:
a) el cuerpo racional Q.
b) el cuerpo real $I\!R$.
c) el cuerpo complejo.

Solución:

a) La forma canónica racional de A sobre el cuerpo racional Q se halla mirando los coeficientes de cada polinomio mónico irreducible sobre Q, que es factor de $m(t)$.

$$m(t) = \overbrace{(t^2+0t+1)}^{P_1}\overbrace{(t^2+0t-3)}^{P_2}$$

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 3 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right]$$

donde: $J_{11}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz acompañante del polinomio $P_1(t)=t^2+0t+1$.

$J_{22}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz el acompañante del polinomio $P_2(t)=t^2+0t-3$.

b) La forma canónica racional de A sobre el cuerpo $I\!R$, se halla cuando cada factor de $P(t)$ esté factorizado sobre $I\!R$.

Así: $P(t)=(t^2+1)(t^2-3)$

$$=\underbrace{(t^2-0t+1)}_{P_1}\underbrace{(t-\sqrt{3})}_{P_2}\underbrace{(t+\sqrt{3})}_{P_3}$$

$$J=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & \\ & & & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

donde: $J_{11}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz acompañante del polinomio $P_1(t)=t^2+0t+1$

$J_{22}=\left[\sqrt{3}\right]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_2(t)=t-\sqrt{3}$

$J_{33}=\left[-\sqrt{3}\right]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_3(t)=t+\sqrt{3}$

c) La forma canónica racional de A sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, se halla cuando cada factor de $P(t)$ esté factorizado sobre $\mathbb{C}$.

Así: $P(t)=(t^2+1)(t^2-3)$

$$=\underbrace{(t-i)}_{P_1}\underbrace{(t+i)}_{P_2}\underbrace{(t-\sqrt{3})}_{P_3}\underbrace{(t+\sqrt{3})}_{P_4}$$

$$J=\begin{bmatrix}i & & & \\ & -i & & \\ & & \sqrt{3} & \\ & & & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

donde: $J_{11}=[i]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_1(t)=t-i$

$J_{22}=[-i]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_2(t)=t+i$

$J_{33}=[\sqrt{3}]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_3(t)=t-\sqrt{3}$

$J_{44}=[-\sqrt{3}]$ es la matriz acompañante del polinomio $P_4(t)=t+\sqrt{3}$

Ejemplo 06. Sea T un operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz.

$$A=\begin{bmatrix}6 & -3 & -2\\ 4 & -1 & -2\\ 10 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

Expresar el polinomio minimal P de T en la forma $P=P_1P_2$, donde P_1 y P_2 son polinomios mónicos e irreductibles sobre el cuerpo de los números reales. Sea W_i el espacio nulo de $P_i(T)$. Hallar las bases β_i para los espacios W_1 y W_2. Si T_i es el operador inducido en W_1 por T, hallar la matriz de T_i en la base β_i (anteriormente citado).

Solución:

a) El polinomio minimal de A es: $P(t)=t^3-(tr\,A)t^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})t-|A|$

donde: $tr\,A=6-1-3=2$

$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -5 & -3\end{vmatrix}=-7$, $A_{22}=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{vmatrix}=2$, $A_{33}=\begin{vmatrix}6 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=6$, $|A|=-2$

Luego, $P(t)=t^3-2t^2+t-2$

$P(t)=(t-2)(t^2+1)$

b) $P_1(t)=t-2$ y $P_2(t)=t^2+1$ son polinomios mónicos e irreductibles sobre el cuerpo de los números reales.

c) El operador $P_1(T)$ es $T-2I$.

Es espacio nulo de $T-2I$ se halla resolviendo el sistema:

$(A-2I)X=0$, donde $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{, se obtiene: } X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{, } x_1 \in I\!R$$

Entonces $W_1 = \ker(T-2I) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in I\!R \right\}$

$= \{ (x_1, 0, 2x_1) / x_1 \in I\!R \}$

d) El operador $P_2(T)$ es $T^2 + I$.

El espacio nulo de $T^2 + I$, se obtiene resolviendo el sistema:

$$(A^2+I)X = 0 \text{ , donde: } A^2+I = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{. La solución es } X = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego: $W_2 = \ker(T^2+I) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in I\!R \text{ , } s \in I\!R \right\}$

e) La base de W_1 es $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

La base de W_2 es $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

f) Se cumple: $V = W_1 \oplus W_2$

g) Del polinomio minimal $P(t) = \overbrace{(t-2)}^{P_1}\overbrace{(t^2+1)}^{P_2}$

obtenemos la forma racional $R = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

donde $R_1 = [2]$ es la matriz acompañante de $P_1(t) = t-2$, y

$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz acompañante de $P_2(t) = t^2+1$.

- Si T_1 es el operador inducido sobre W_1 por T entonces el polinomio minimal de T_1 es $P_1(t) = t-2$.
- Si T_2 es el operador inducido sobre W_2 por T entonces el polinomio minimal de T_2 es $P_2(t) = t^2+1$.

Ejemplo 07. Dado la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) ¿Es A una matriz nilpotente?

b) Si A es nilpotente, hallar la matriz nilpotente en forma canónica.

Solución:

a) $AA = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Porque $A^3 = 0$, afirmamos que la matriz A es nilpotente de índice $k = 3$.

b) **La matriz nilpotente en forma canónica es:**

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- **La matriz M contiene un bloque diagonal de orden 3 y ningún orden mayor.**
- **El rango de A es 2 y la nulidad de A es $5-2=3$.**
- **En total, A contiene 3 bloques dispuestos en forma diagonal, una de orden 3 y dos de orden 1.**

Ejemplo 08. Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (0,x)$

Se pide:

a) Hallar la matriz de T en la base canónica.

b) Dado el polinomio $g(x) = a + bx$, hallar:

i) El operador $g(T)$, y

ii) La matriz $g(A)$, siendo A la matriz hallada en a).

c) Dado el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$, hallar el subespacio: $W = \{ g(T)\varepsilon_1 / g \in \mathbb{K}[x] \}$

d) ¿Se cumple $W = \mathbb{R}^2$?

e) Dado el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$, hallar los vectores $T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_1, T^3\varepsilon_1, \ldots\ldots$ y formar un subespacio que tenga como base el conjunto $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_2, \ldots, T^{k-1}\varepsilon_1\}$, tal que $T^k = 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

f) Dado el vector $\varepsilon_2 = (0,1)$, formar la sucesión $\varepsilon_2, T\varepsilon_2, T^2\varepsilon_2, \ldots$, ; hasta que $T^k\varepsilon_2 = (0,0)$.

Solución:

a) La matriz de $T(x,y) = (0,x)$, en la base canónica, es $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) Si $g(x) = a + bx$, entonces:

i) $g(T) = aI + bT$

ii) $g(A) = aI + bA = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$

c) El subespacio W, tal como está definido, se halla haciendo la multiplicación $g(A)\varepsilon_1$:

$$g(A)\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Entonces $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$

d) Por los resultados obtenidos en c), se cumple $W = \mathbb{R}^2$.

Definición.- Sea $\varepsilon_1 = (1,0)$ un vector de $\mathbb{R}^2$, el subespacio

$$Z(\varepsilon_1, T) = \{ g(T)\varepsilon_1 / g \in \mathbb{K}[x] \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R} \right\}$$

Se llama subespacio T-cíclico generado por ε_i.

e) Si $\varepsilon_1 = (1,0) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces:

$$T\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T^2\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } T^2 \equiv A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así hemos obtenido el conjunto $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$. Este conjunto constituye una base de un subespacio, que la denotamos por $Z(\varepsilon_1, T)$. Siendo así, se tiene que $\dim Z(\varepsilon_1, T) = 2$.

$$Z(\varepsilon_1, T) = gen\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\}$$
$$= gen\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \qquad T\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Aquí, ε_1 es un vector cíclico.

f) $\varepsilon_2 = (0,1)$

$$T\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, con el mismo operador T, hemos obtenido el subespacio cíclico $Z(\varepsilon_2, T) = gen\{\varepsilon_2\}$, generado por ε_2, donde $\dim Z(\varepsilon_2, T) = 1$

Si la $\dim Z(\varepsilon_2, T) = 1$, entonces ε_2 es un vector propio del operador T.

Verifiquemos

De la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ obtenemos:

i) El polinomio característico $f(t)=t^2$

ii) Un valor propio es $t=0$

iii) El vector propio asociado a $t=0$, se obtiene resolviendo:

$$(A-0I)X=0$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad \text{entonces } X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

VECTOR PROPIO

- Si $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1\}$ es una base de $Z(\varepsilon_1,T)$, entonces:

$$a\varepsilon_1+bT\varepsilon_1=0 \qquad \text{implica } a=0 \text{ y } b=0$$

$$(aI+bT)\varepsilon_1=0 \quad , \quad \text{pero } \varepsilon_1\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow \quad aI+bT=0$$

$$\Rightarrow \quad a+bt=0$$

En este caso, el polinomio $f(t)=a+bt$ se llama el *T-aniquilador* de ε_1 y $Z(\varepsilon_1,T)$.

Ejemplo 09. Sea T el operador lineal sobre $I\!R^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Demostrar que T no tiene vector cíclico. ¿Cuál es el subespacio *T*-cíclico generado por el vector $(1,-1,3)$?

Solución:

- Haciendo sucesivas multiplicaciones: $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$; vamos a obtener recursivamente que:

$$A^n=\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{bmatrix}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

- ¿Habrá un vector $X\neq 0$, tal que, $A^nX=0$?

Veamos:

$$\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \text{ implica } \begin{cases}2^n x=0\\ 2^n y=0\\ (-1)^n z=0\end{cases} \Leftarrow$$

en estas ecuaciones se tiene $2^n\neq 0$, $\forall n$, $(-1)^n\neq 0$, $\forall n$. Lo único que podría ocurrir es que $x=0$, $y=0$, $z=0$. Pero sería un absurdo, ya que $X\neq(0,0,0)$

En consecuencia T no tiene vector cíclico.

- El subespacio *T*-cíclico generado por $v=(1,-1,3)$ se obtiene formando la sucesión: $v, Tv, T^2v, T^3v, \ldots, T^{k-1}v, T^kv$

Se llega a la conclusión que: $T^kv=\begin{bmatrix}2^k\\ -2^k\\ 3(-1)^k\end{bmatrix}$, $k=0,1,2,\ldots$

donde T^kv es equivalente a: $A^kv=\begin{bmatrix}2^k & 0 & 0\\ 0 & 2^k & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^k\\ -2^k\\ 3(-1)^k\end{bmatrix}$

En consecuencia $\{z(v,T)=(2^k,-2^k,3(-1)^k\,/\,k=0,1,2,\ldots\}$

Ejemplo 10. Sea T el operador lineal $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definido por:

$$T(x,y)=(2x+y,2y)$$

a) Hallar la matriz en la base ordenada canónica.

b) Sea W_1 el subespacio de IR^2 generado por el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$.

c) Demostrar que W_1 es invariante por T.

d) Demostrar que no existe un subespacio W_2 que es invariante por T y que es complementario de W_1: $IR^2 = W_1 \oplus W_2$.

Solución:

a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

La matriz de T en la base ordenada canónica es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) El polinomio característico y el polinomio minimal coinciden y es:

$$P(t) = m(t) = (t-2)^2$$

El único vector propio asociado a $t = 2$ es $\varepsilon_1 = (1,0)$. Luego, el único subespacio propio, invariante por T, generado por el vector $\varepsilon_1 = (1,0)$ es $W_1 = gen\{\varepsilon_1\}$

c) Si al elegir un vector $v \in W_1$, se prueba que $T(v) \in W_1$, entonces W_1 es invariante por T.

Veamos:

Si $v \in W_1$ entonces $v = \alpha(1,0)$, $\alpha \in IR$

Aplicar T: $T(v) = \alpha T(1,0)$

$= \alpha(2,0) = 2\alpha(1,0) \in W_1$

Luego, W_1 es invariante por T.

d) Por la parte b) afirmamos que no existe un subespacio W_2 que es invariante por T y que es complemento de W_1, tal que, $IR^2 = W_1 \oplus W_2$.

Ejemplo 11. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

a) ¿Es A una matriz nilpotente?

b) Hallar el subespacio invariante por T, generado por los vectores $T^k\alpha$, $k \geq 0$.

c) Hallar la forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente.

Solución:

a) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Afirmamos que A es una matriz nilpotente de índice $k = 3$

b) Fijar un vector $\alpha \in V = IR^3$, tal que $T^2\alpha \neq 0$.

No podíamos elegir el vector $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$.

Pero, si podríamos elegir el vector $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Así tendremos: $\varepsilon_1 , T\varepsilon_1 , T^2\varepsilon_1$

donde: $T\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$T^2\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Así, hemos obtenido el subespacio $Z(\varepsilon_1, T)$ generado por los vectores $\{\varepsilon_1, T\varepsilon_1, T^2\varepsilon_1\}$.

Esto es: $Z(\varepsilon_1, T) = gen\{(1,0,0), (-2,1,-1), (6,0,6)\}$.

- Afirmamos que: $Z(\varepsilon_1, T) = V$, $V = IR^3$; porque la $\dim Z(\varepsilon_1, V) = 3$.

  En este caso decimos que $\varepsilon_1 = (1,0,0)$ es ***un vector cíclico*** de T.

c) La forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente A de índice 3, es:

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ — Diagonal de valores propios.

La matriz B se obtiene del polinomio minimal de la matriz A. Veamos, ¿cómo es esto?

El polinomio característico y el polinomio minimal de A coinciden y son: $P(t)=t^3$, $m(t)=t^3$.

El único valor propio es $t=0$, que es una raíz de $P(t)$ que se repite tres veces, entonces la forma canónica de Jordan de la matriz nilpotente A de índice 3 es B.

Ejemplo 12. Sea $T:V\longrightarrow V$ es operador lineal sobre el espacio V. Probar que los siguientes subespacios es invariante bajo T:

a) $\{0\}$, b) V , c) núcleo de T , d) imagen de T.

Solución:

a) Sea $W=\{0\}$ el subespacio nulo de T. Debo probar que $T(0)\in W$.

Veamos:

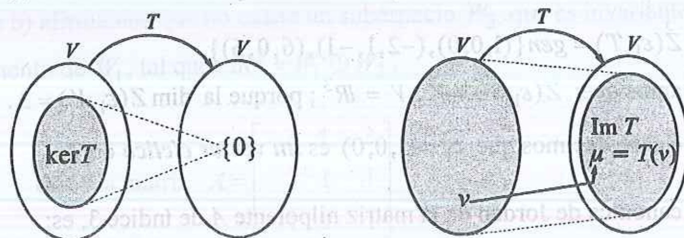
Por hipótesis $0\in W$. Pero $T(0)=0\in W$, entonces W es invariante bajo T.

b) Sea $v\in V$, debo probar que $Tv\in V$. La proposición $Tv\in V$ es verdadero, por definición del operador lineal T, entonces V es invariante por T.

c) Eligiendo un vector $\mu\in Ker\,T$, debo probar que $T(\mu)\in Ker\,T$.

Veamos:

Si $\mu\in Ker\,T$, entonces $T(\mu)=0$. Pero $T(\mu)=0\in Ker\,T$, porque el $Ker\,T$ es un subespacio de V. Entonces $Ker\,T$ es invariante por T.



d) Se debe probar que $T(v)\in \operatorname{Im}T$, siempre que. $v\in \operatorname{Im}T$.

Por definición de imagen directa, es verdadero la proposición: $T(v)\in \operatorname{Im}T$ para todo $v\in V$. En particular, también es verdadero cuando $v\in \operatorname{Im}T$.

Por tanto, la imagen de T es invariante bajo T.

Ejemplo 13. Supóngase que $\{W_i\}$ es una colección de subespacios T-invariantes de un espacio vectorial V. Probar que la intersección $W=\bigcap\limits_{i=1} W_i$ es también T-invariante.

Demostración:

- Eligiendo el vector $v\in W$ se debe probar que $T(v)\in W$.
- **Veamos:**

  Sea $v\in W=\bigcap\limits_{i=1} W_i$, entonces $v\in W_i$ para todo i.
- Como W_i es T-invariante, entonces $T(v)\in W_i$ para todo i.
- Lo cual implica que $T(v)\in\bigcap\limits_{i=1} W_i=W$ ■

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01

01 Determinar los subespacios invariantes de $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ vista como operador lineal en:

a) $I\!R^2$ b) $\mathbb{C}^2$

Respuesta: a) $I\!R^2$ y $\{0\}$

b) $\mathbb{C}^2$, $\{0\}$, $W_1 = L((2,1-2i))$, $W_2 = ((2,1+2i))$

02 Hallar todas las formas canónicas de Jordan posibles para aquellas matrices cuyos polinomios característicos $p(t)$ y mínimo $m(t)$ son:

a) $p(t)=(t-2)^4(t-3)^3$, $m(t)=(t-2)^2(t-3)^2$

b) $p(t)=(t-7)^5$, $m(t)=(t-7)^2$

c) $p(t)=(t-3)^4(t-5)^4$, $m(t)=(t-3)^2(t-5)^2$

Respuestas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{bmatrix}$

03 Encontrar todas las formas canónicas racionales posibles para:

a) matrices 6×6 con polinomio mínimo $m(t)=(t^3+3)(t+1)^2$

b) matrices 6×6 con polinomio mínimo $m(t)=(t+1)^3$

c) matrices 8×8 con polinomio mínimo $m(t)=(t^2+2)^2(t+3)^2$

Respuesta:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -3 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & -2 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & -3 \\ & & & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & -2 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -2 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -9 \\ & & & & & & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -9 & & \\ & & & & 1 & -6 & & \\ & & & & & & 0 & -9 \\ & & & & & & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -9 & & \\ & & & & 1 & -6 & & \\ & & & & & & -3 & \\ & & & & & & & -3 \end{bmatrix}$

04 Si F es el campo de los números racionales, encuéntrese todas las formas canónicas racionales posibles y todos los divisores elementales para:

a) Las matrices 6×6 en F_6 que tienen $(x-1)(x^2+1)^2$ como polinomio mínimo.

b) Las matrices 15×15 en F_{15} que tienen $(x^2+x+1)^2(x^3+2)^2$ como polinomio mínimo.

c) Las matrices 10×10 en F_{10} que tienen $(x^2+1)^2(x^3+1)$ como polinomio mínimo.

05 Sea $\mathfrak{L}(V)=\{T: V \longrightarrow V,\ T \text{ es un operador lineal}\}$.

Demostrar que: Si λ es un valor propio de T, entonces $P(\lambda)$ es un valor propio de $P(T)$, para algún polinomio $p(x)$. También, si $\lambda \neq 0$, entonces λ^{-1} es un autovalor de T^{-1}.

06 Un operador $T\in\mathfrak{L}(V)$ es ***nilpotente*** si $T^n=0$ para algún $n\in I\!N$.

a) Demostrar que, si T es nilpotente, entonces **0** es un autovalor de T y es el único valor propio de T.

b) Encontrar un operador T que tiene 0, y sólamente 0 es un autovalor, pero no es nilpotente.

07 Demostrar que si $T,U\in\mathfrak{L}(V)$, entonces TU y UT tienen los mismos autovalores.

08 Suponer que $T,U\in\mathfrak{L}(V)$. Demostrar que si $TU=UT$, entonces T y U tienen un autovalor común.

09 Sea P una proyección. Demostrar que $Ker(I-P)=\mathrm{Im}(P)$ y $\mathrm{Im}(I-P)=\ker(P)$.

10 Una ***involución*** es un operador lineal θ que cumple $\theta^2=I$, I: identidad. Si T es idempotente, ¿qué puede decir acerca de $2T-I$?

GRUPO 02

Hallar la forma canónica B de la base ortogonal A y una matriz diagonal Q tal que $B=Q^{-1}AQ$:

01 $A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

02 $A=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

03 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

04 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Respuestas:

01 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{bmatrix}$

02 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

03 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

04 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $Q=\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

05 Para la matriz unitaria dada $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4+3i & 4i & -6-2i\\ -4i & 4-3i & -2-6i\\ 6+2i & -2-6i & 1\end{bmatrix}$ hallar una matriz diagonal B y una matriz unitaria Q tales que $B=Q^{-1}AQ$.

Respuesta:

$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i\\ -\frac{2}{3}i & \frac{1}{3}i & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

◆ Hallar una base ortonormal formada por los vectores propios y la matriz B en esta base para la transformación lineal, dada en una base ortonormal por la matriz A (la base buscada no se determina unívocamente).

06 $A=\begin{bmatrix}11 & 2 & -8\\ 2 & 2 & 10\\ -8 & 10 & 5\end{bmatrix}$ **07** $A=\begin{bmatrix}17 & -8 & 4\\ -8 & 17 & -4\\ 4 & -4 & 11\end{bmatrix}$ **08** $A=\begin{bmatrix}2 & -i & 0\\ i & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

Respuestas:

06 $v_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $v_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $v_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $B=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$

07 $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{1}{\sqrt{18}},-\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$, $B=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 27\end{bmatrix}$

08 $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0)$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$, $v_3=(0,0,1)$, $Bi=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

◆ **Para la matriz dada A, hallar una matriz diagonal B y una matriz unitaria C, tales que $B=C^{-1}AC$.**

09 $A=\begin{bmatrix}3 & 2+2i\\ 2-2i & 1\end{bmatrix}$ **10** $A=\begin{bmatrix}3 & 2-i\\ 2+i & 7\end{bmatrix}$

Respuesta:

09 $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

10 $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$; $C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2-i & 1\\ -1 & 2+i\end{bmatrix}$

◆ Expresar las siguientes matrices en forma de un producto de una matriz simétrica con números característicos positivos por una matriz ortogonal.

11 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **12** $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **13** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta:

11 $\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 7 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

7.1 PRODUCTOS INTERNOS

Definición.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

Un ***producto interno*** sobre V es una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada par de vectores $\mu, v \in V$ le asigna un escalar $\langle \mu, v \rangle$ de $\mathbb{C}$, llamado producto interno de μ por v, de modo que sean válidas las siguientes propiedades:

a) $\left.\begin{array}{l} \langle \mu + v, w \rangle = \langle \mu, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \mu, v + w \rangle = \langle \mu, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \end{array}\right\}$ bilinealidad $\mu, v, w \in V$

b) $\langle \alpha\, \mu, v \rangle = \alpha \langle \mu, v \rangle$, $\mu, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$

c) $\langle \mu, v \rangle = \overline{\langle v, \mu \rangle}$, la barra indica la conjugación compleja , $\mu \in V$, $v \in V$

d) $\langle \mu, \mu \rangle > 0$, Si $\mu \neq 0$, $\mu \in V$

e) Por (a), (b), (c) y (d) se cumple: $\langle \mu, \alpha\, v + w \rangle = \overline{\alpha} \langle \mu, v \rangle + \langle \mu, w \rangle$

OBSERVACIÓN. Si elegimos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y teniendo en cuenta la función

$$\begin{array}{l} \langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (\mu, v) \longmapsto \langle \mu, v \rangle \end{array}$$

se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\langle \mu + v, w \rangle = \langle \mu, w \rangle + \langle v, w \rangle$ .... bilinealidad

$\langle \mu, v + w \rangle = \langle \mu, v \rangle + \langle \mu, w \rangle$

b) $\langle \alpha\, u, v \rangle = \alpha \langle \mu, v \rangle$

$\langle \mu, \alpha\, v \rangle = \alpha \langle \mu, v \rangle$

c) $\langle v, \mu \rangle = \langle \mu, v \rangle$ .... conmutatividad (simetría)

d) $\langle \mu, \mu \rangle > 0$, si $\mu \neq 0$ .... positividad

Ejemplo 01 Si la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos por

$$(\mu,\nu) \longmapsto \langle \mu,\nu\rangle$$

$$\langle \mu,\nu\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 \quad , \text{donde} \begin{cases} \mu = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \nu = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Se pregunta ¿es $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$?

Solución:

Propiedad (a): Elegimos los vectores $\mu = (x_1,x_2)$, $\nu = (y_1,y_2)$, $w = (z_1,z_2)$ en $\mathbb{R}^2$ donde $\mu + \nu = (x_1 + y_1\ ,\ x_2 + y_2)$.

Luego

$$\begin{aligned} \langle \mu+\nu, w\rangle &= \langle (x_1+y_1, x_2+y_2), (z_1,z_2)\rangle \\ &= (x_1+y_1)z_1 - (x_2+y_2)z_1 - (x_1+y_1)z_2 + 4(x_2+y_2)z_2 \\ &= \underbrace{x_1z_1 - x_2z_1 - x_1z_2 + 4x_2z_2}_{} + \underbrace{y_1z_1 - y_2z_1 - y_1z_2 + 4y_2z_2}_{} \\ &= \qquad \langle \mu, w\rangle \qquad + \qquad \langle \nu, w\rangle \end{aligned}$$

De manera similar se cumplen (b) y (c)

Propiedad (d): Elegir $\mu = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\mu \neq (0,0)$.

$$\begin{aligned} \langle \mu,\mu\rangle &= x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + 4x_2x_2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 \end{aligned}$$

Completar cuadrados.

$$\begin{aligned} &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Conclusión: $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 02 En $\mathbb{C}^n$ existe un producto interno que se llama ***producto interno canónico***. Está definido sobre $\mu = (x_1,\dots,x_n)$ y $\nu = (y_1,\dots,y_n)$ por:

$$\langle \mu,\nu\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y}_i \quad ; \quad x_i \in \mathbb{C} \quad , \quad y_i \in \mathbb{C}$$

- En $\mathbb{R}^n$ el producto interno canónico está definido por:

$$\langle \mu,\nu\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad , \text{donde } \mu = (x_1,\dots,x_n),\ \nu = (y_1,\dots,y_n) \text{ son vectores de } \mathbb{R}^n .$$

Ejemplo 03 Sea $V = C^{\circ}[a,b]$ el espacio vectorial cuyos elementos son las funciones continuas $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Un producto interno en V está definido por:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

OBSERVACIONES:

a) Un método de construir nuevos productos internos a partir de uno dado, es el siguiente:

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y supóngase que:

$\langle\ ,\ \rangle : W \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno sobre W.

$(\mu,\nu) \longmapsto \langle \mu,\nu\rangle$

Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal no singular entonces la igualdad $p_T(\mu,\nu) = \langle T\mu, T\nu\rangle$ define un producto interno p_T sobre V, esto es:

$$\begin{aligned} p_T : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\mu,\nu) &\longmapsto p_T(\mu,\nu) = \langle T\mu, T\nu\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 04 Sea $\mathbb{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} : a_{i1} \in \mathbb{R} \right\}$ el espacio de las matrices (columnas) $n\times 1$ sobre $\mathbb{R}$, y sea $Q = (b_{ij})_{n\times n}$ una matriz inversible $n\times n$ sobre $\mathbb{R}$. La función:

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longmapsto \langle X,Y\rangle = Y^t Q^t Q X \end{aligned}$$

define un producto interno.

b) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ una base ordenada de V.

Sean $\{e_1,\dots,e_n\}$ los vectores de la base canónica en $I\!R^n$ y sea

$$T: V \longrightarrow I\!R^n \text{ la transformación lineal de } V \text{ en } I\!R^n$$
$$\mu_j \longmapsto T(\mu_j) = e_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

Sean $\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \mu_i$ dos vectores de V.

Sobre V definimos el siguiente producto interno: $P_T : V \times V \longrightarrow I\!R$

$$(\mu,v) \longmapsto P_T(\mu,v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \beta_i$$

Ejemplo 05 Sea $V = \{f : [0,1] \longrightarrow I\!R \,/\, f$ es continua sobre $[0,1]\}$

Sea el operador lineal $T: V \longrightarrow V$

$$f \longmapsto (Tf)(t) = t\, f(t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Se construye el producto interno $P_T : V \times V \longrightarrow I\!R$

$$(f,g) \longmapsto P_T(f,g) = \int_0^1 (Tf)(t)\,(Tg)(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 f(t)\, g(t)\, t^2\, dt$$

7.2. NORMA DE UN VECTOR

Definición: La ***norma*** (o valor absoluto) de un vector $v \in V$ es el número real no negativo.

$$|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Ejemplo 06 Sea $\mathbb{C}^n$ un conjunto $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Un producto interno sobre $\mathbb{C}^n$ es la aplicación: $\langle\,,\,\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\mu,v) \longmapsto \langle\mu,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y}_i$$

donde $\mu = (x_1,\dots,x_n)$ y $v = (y_1,\dots,y_n)$ son elementos de $\mathbb{C}^n$. La ***norma*** de un vector $\mu \in \mathbb{C}^n$ es el número real no negativo:

$$|\mu| = \sqrt{\langle\mu,\mu\rangle}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad , \quad x_i \in \mathbb{C}$$

Ejemplo 07 Sea $I\!R^n$ un $I\!R$-espacio vectorial. Un producto interno sobre $I\!R^n$ es la aplicación $\langle\,,\,\rangle : I\!R^n \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$

$$(\mu,v) \longmapsto \langle\mu,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

donde $\mu = (x_1,\dots,x_n)$, $v = (y_1,\dots,y_n)$ son elementos de $I\!R^n$.

La ***norma*** de un vector $\mu \in I\!R^n$ es el número real no negativo:

$$|\mu| = \sqrt{\langle\mu,\mu\rangle}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\, x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad , \quad x_i \in I\!R$$

Ejemplo 08 Sea $V = C^{\circ}[a,b]$ el espacio vectorial definido en el ejemplo 3. Un producto interno sobre V es la aplicación.

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow I\!R$$
$$(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

La ***norma*** de un vector $f \in V$ es el número real no negativo. $|f| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx$$

PROBLEMAS RELATIVOS AL PRODUCTO INTERNO EN $\mathbb{C}^n$

01 Sea $V = \mathbb{C}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, probar que:

$\langle\mu,v\rangle = \overline{\langle v,\mu\rangle}$, $\mu = (x_1,\dots,x_n)$, $v = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{C}^n$, $x_i \in \mathbb{C}$, $y_i \in \mathbb{C}$.

Prueba:

- Por definición de producto interno dado en el ejemplo 2, se tiene:

$$\langle \mu, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i} \quad , \quad x_i \in \mathbb{C} \ , \ y_i \in \mathbb{C}$$

- De manera similar: $\langle v, \mu\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \overline{x_i}$

- $\overline{\langle v, \mu\rangle} = \overline{\sum y_i\, \overline{x_i}} = \sum \overline{y_i}\, \overline{\overline{x_i}} = \sum \overline{y_i}\, x_i \quad , \quad \overline{\overline{x_i}} = x_i$

$$= \sum x_i\, \overline{y_i} = \langle \mu, v\rangle$$

02 Probar que $\langle \mu, v\rangle = \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle$

Prueba:

- $\langle \mu, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overline{y_k} \quad , \quad x_k = a_k + i b_k \ ; \ a_k, b_k \in I\!R$

$\qquad y_k = c_k + i d_k \ ; \ c_k, d_k \in I\!R$

$\qquad \overline{y_k} = c_k - i d_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k + i b_k)(c_k - i d_k)$$

$$= \sum (a_k c_k + b_k d_k) + i \sum (b_k c_k - a_k d_k)$$

$$= \quad \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + \quad i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle$$

Nota: $\quad |\langle \mu, v\rangle| = \sqrt{(\operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle)^2 + (\operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle)^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle)^2} = |\operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle|$

03 En base al problema **02**, se cumple: $\overline{\langle \mu, v\rangle} = \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle - i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle$

04 Aplicando la propiedad: $\|\mu\|^2 = \langle \mu, \mu\rangle$, probar que:

$\|\mu + v\|^2 = \|\mu\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + \|v\|^2$

Prueba:

- $\|\mu + v\|^2 = \langle \mu + v\, , \mu + v\rangle$

$$= \langle \mu, \mu\rangle + \langle \mu, v\rangle + \langle v, \mu\rangle + \langle v, v\rangle$$

$$= \|\mu\|^2 + \langle \mu, v\rangle + \langle v, \mu\rangle + \|v\|^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- Pero $\langle v, \mu\rangle = \overline{\langle \mu, v\rangle} = \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle - i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle$ .... Problema **03**

y $\langle \mu, v\rangle = \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle$ .... Problema **02**

- Volviendo a (1):

$$\|\mu + v\|^2 = \|\mu\|^2 + \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle + \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle - i \operatorname{Im}\langle \mu, v\rangle + \|v\|^2$$

$$= \|\mu\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + \|v\|^2$$

05 De manera similar, se cumple:

$$\|\mu - v\|^2 = \|\mu\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle \mu, v\rangle + \|v\|^2$$

06 Probar que: a) $\langle \mu, v\rangle = \frac{1}{4}\|\mu + v\|^2 - \frac{1}{4}\|\mu - v\|^2$

b) $\langle \mu, v\rangle = \frac{1}{4}\|\mu + v\|^2 - \frac{1}{4}\|\mu - v\|^2 + \frac{i}{4}\|\mu + iv\|^2 - \frac{i}{4}\|\mu - iv\|^2$

Otra forma de expresar b): $\quad \langle \mu, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n \|\mu + i^n v\|^2$

07 Probar que $\langle 0, v\rangle = 0$

Prueba:

Aplicar la propiedad (a) de la definición de producto interno:

$$\langle 0, v\rangle = \langle 0 + 0, v\rangle$$

$$\langle 0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle$$

$0 = \langle 0, v\rangle$ .... **Propiedad cancelativa de la suma.**

08 Si $\langle \mu, v\rangle = 0$, $\forall\, v \in V$, entonces $\mu = 0$

Prueba:

Si $\mu \neq 0$, tendríamos $\langle \mu, v\rangle \neq 0$ por lo menos cuando $v = \mu$.

09 Si $\langle \mu, v\rangle = \langle \mu', v\rangle$ para todo $v \in V$ entonces $\mu = \mu'$

Prueba:

Si $\langle \mu, v\rangle = \langle \mu', v\rangle$ entonces $\langle \mu, v\rangle - \langle \mu', v\rangle = 0 \quad , \quad \forall\, v \in V$

$\langle \mu - \mu', v\rangle = 0$

entonces $\mu - \mu' = 0 \quad ,$ por **08**.

$\mu = \mu'$

7.3 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Definición: Un espacio con ***producto interno*** es un espacio real o complejo junto con un producto interno definido sobre ese espacio.

- Un espacio con producto interno real de dimensión finita se llama a menudo ***espacio euclideano***. Un espacio con producto interno complejo se llama ***espacio unitario.***

TEOREMA 1. Si V es un espacio vectorial con producto interno, entonces, para vectores μ, v cualquiera de V y cualquier escalar α, se cumplen:

a) $\|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|$;

b) $\|\mu\| > 0$, para $\mu \neq 0$

c) $|\langle\mu, v\rangle| \leq \|\mu\|\,\|v\|$ .... (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

valor absoluto del producto interno.

d) $\|\mu + v\| \leq \|\mu\| + \|v\|$ .... (desigualdad triangular)

Demostración:

Bastará aplicar la definición de producto interno: $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow I\!K$

$$(\mu, v) \longmapsto \langle\mu, v\rangle$$

y sus propiedades:

a) Probar: $\|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|$

Veamos:

$$\|\alpha\mu\|^2 = \langle\alpha\mu, \alpha\mu\rangle = \alpha\langle\mu, \alpha\mu\rangle$$
$$= \alpha\overline{\langle\alpha\mu, \mu\rangle}$$
$$= \alpha\overline{\alpha\langle\mu, \mu\rangle}$$
$$= \alpha\bar{\alpha}\overline{\langle\mu, \mu\rangle} \quad , \quad \langle\mu, \mu\rangle = \|\mu\|^2 \ , \ \overline{\langle\mu, \mu\rangle} = \|\mu\|^2$$
$$= |\alpha|^2\,\|\mu\|^2 \quad , \quad \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 \ , \ \alpha \in \mathbb{C}$$

Luego: $\|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|$

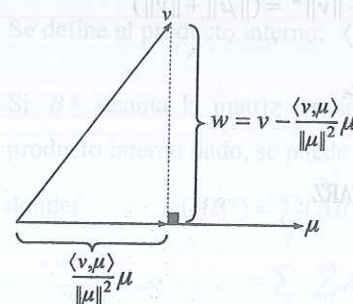
c) Probar $|\langle\mu, v\rangle| \leq \|\mu\|\,\|v\|$

Veamos:

1. Si $\mu = 0$, por el problema 7, se tiene $\langle 0, v\rangle = 0$.

2. Además $\|\mu\| = \|0\| = 0$. Entonces la desigualdad c) es evidente.

3. Si $\mu \neq 0$, probaremos que $|\langle\mu, v\rangle| \leq \|\mu\|\,\|v\|$



En el gráfico tenemos:

a) El vector $\frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu$ es la proyección del vector v sobre el vector μ y en la dirección de μ.

b) El vector w es la diferencia de v con el vector $\frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu$.

c) w es ortogonal al vector μ, entonces $\langle w, \mu\rangle = 0$.

4. Partimos de la propiedad: $\|w\| \geq 0$

$$\langle w, w\rangle \geq 0 \quad , \quad \text{pues } \|w\|^2 = \langle w, w\rangle$$

$$\left\langle v - \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu \, , \, v - \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu \right\rangle \geq 0$$

$$\langle v, v\rangle - \left\langle v, \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu\right\rangle - \left\langle \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu, v\right\rangle + \left\langle \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu, \frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu\right\rangle \geq 0$$

$$\|v\|^2 - 2\frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\langle v, \mu\rangle + \left\|\frac{\langle v,\mu\rangle}{\|\mu\|^2}\mu\right\|^2 \geq 0$$

$$\|v\|^2 - 2\frac{\langle v,\mu\rangle^2}{\|\mu\|^2} + \frac{|\langle v,\mu\rangle|^2}{\|\mu\|^4}\|\mu\|^2 \geq 0$$

$$\|v\|^2 - \frac{|\langle\mu,v\rangle|^2}{\|\mu\|^2} \geq 0$$

$$\|\mu\|^2\,\|v\|^2 \geq |\langle\mu, v\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|\mu\|\,\|v\| \geq |\langle\mu, v\rangle|$$

Consecuencia: La igualdad: $|\langle\mu, v\rangle| = \|\mu\|\,\|v\|$ se cumple cuando μ y v son linealmente dependiente (es decir, cuando $\mu = \alpha v$, $\alpha \in I\!K$).

d) Probar: $\|\mu + v\| \leq \|\mu\| + \|v\|$

1. Se parte de : $\|\mu+v\|^2 = \|\mu\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle\mu,v\rangle + \|v\|^2$ .... Ver problema 4 y 2.
2. Pero : $|\langle\mu,v\rangle| \le \|\mu\|\,\|v\|$, pues $\mathrm{Re}\langle\mu,v\rangle \le |\mathrm{Re}\langle\mu,v\rangle| \le |\langle\mu,v\rangle|$
3. Entonces : $\|\mu+v\|^2 \le \|\mu\|^2 + 2\|\mu\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|\mu\|+\|v\|)^2$
4. Luego : $\|\mu+v\|^2 \le (\|\mu\|+\|v\|)^2$
5. Por tanto : $\|\mu+v\| \le \|\mu\| + \|v\|$ ▪

APLICACIONES DE LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ .

(01) En el ejemplo 1.

$|\langle\mu,v\rangle| \le \|\mu\|\,\|v\|$

$$|x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2| \le ((x_1-x_2)^2+3x_2^2)^{1/2}((y_1-y_2)^2+3y_2^2)^{1/2}$$

Donde:
$$\begin{cases} \mu = (x_1,x_2) \\ v = (y_1,y_2) \\ \|\mu\| = \sqrt{\langle\mu,\mu\rangle} \\ \langle\mu,\mu\rangle = x_1^2 - x_2x_1 - x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \quad = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \quad = (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2 \\ \langle v,v\rangle = (y_1-y_2)^2 + 3y_2^2 \end{cases}$$

(02) En el ejemplo 2 se define el producto interno sobre $\mathbb{C}^n$ del siguiente modo:
$\langle\mu,v\rangle = \sum x_i\,\overline{y}_i$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es: $|\langle\mu,v\rangle| \le \|\mu\|\,\|v\|$

En este caso: $\|\mu\| = \sqrt{\langle\mu,\mu\rangle} = \sqrt{\sum x_i\,\overline{x}_i} = \sqrt{\sum |x_i|^2}$

$\|v\| = \sqrt{\sum |y_i|^2}$

En consecuencia: $|\langle\mu,v\rangle| = |\sum x_i\,\overline{y}_i| \le (\sum|x_i|^2)^{1/2}\,(\sum|y_i|^2)^{1/2}$

(03) En el espacio vectorial $V = \mathbb{K}^{n\times n} = \{(a_{ij}) / a_{ij} \in \mathbb{K}\}$ — matrices cuadradas $n\times n$ sobre $\mathbb{K}$.

Se define el producto interno: $\langle A,B\rangle = \sum_{j,k} A_{jk}\,\overline{B}_{jk}$; $A,B \in V$

Si B^* denota la matriz transpuesta conjugada, esto es, $B^*_{kj} = \overline{B}_{jk}$, entonces el producto interno dado, se puede expresar: $\langle A,B\rangle = tr(AB^*) = tr(B^*A)$.

donde:
$$tr(AB^*) = \sum_j (AB^*)_{jj} = \sum_j\sum_k A_{jk}B^*_{kj} = \sum_j\sum_k A_{jk}\overline{B}_{jk}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es:

$|\langle A,B\rangle| \le \|A\|\,\|B\|$,

$|tr(AB^*)| \le (tr(AA^*))^{1/2}(tr(BB^*))^{1/2}$

donde:
$$\begin{cases} \|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} \\ \quad = \sqrt{tr(AA^*)} \\ \|B\| = \sqrt{tr(BB^*)} \end{cases}$$

(04) En el espacio vectorial $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} / f$ es continua sobre $[0,1]\}$ se define el producto interno: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es:

$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$

$$|\langle f,g\rangle| \le \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

donde:
$$\begin{cases} \|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_0^1 f(t)\overline{f}(t)\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\ \|g\| = \left(\int_0^1 |g(t)|^2\,dt\right) \end{cases}$$

7.4 CONJUNTO ORTOGONAL Y CONJUNTO ORTONORMAL

Definición.- Sean μ y v vectores de un espacio con producto interno V. Diremos que μ y v son ortogonales si $\langle \mu, v\rangle = 0$. Esta definición encierra dos implicancias: si μ es ortogonal a v, entonces $\langle \mu, v\rangle = 0$ y si v es ortogonal a μ, entonces $\langle v, \mu\rangle = 0$.

Definición.- Sea S un conjunto de vectores de V, se dice que S es un ***conjunto ortogonal*** si todos los pares de vectores distintos de S son ortogonales.

Definición.- Diremos que un conjunto de vectores S es ***ortonormal***, si S es un conjunto ortogonal y cada vector $v \in S$ cumple la propiedad $\|v\| = 1$.

Ejemplo 09 a) El vector cero es ortogonal a todo vector en V.

b) La base canónica $S = \{(1,0),(0,1)\}$ de $I\!R^2$ es un conjunto ortonormal.

c) Si elegimos un vector $v = (a,b) = I\!R^2$ y definimos los vectores $\mu = \frac{1}{|v|} v = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)$ y $\mu^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b,a)$, obtenemos el conjunto de vectores $S = \{\mu, \mu^{\perp}\}$, que viene a ser una base ortonormal de $I\!R^2$.

d) $S = \{(cos\,\theta, sen\,\theta), (-sen\,\theta, cos\,\theta)\}$ es una base ortonormal de $I\!R^2$.

f) En general $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de $I\!R^n$, siempre que cumpla las propiedades:

i) $e_i e_j = 0$, si $i \neq j$

ii) $\|e_i\| = 1$, $\forall\, i$

Ejemplo 10 Sea el espacio vectorial $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, f$ es continua en $[0,1]\}$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\,dx$. Supongamos que elegimos en V dos tipos de funciones definidas por $f_n(x) = \sqrt{2}\,cos\,2\pi n x$ y $g_n(x) = \sqrt{2}\,sen\,2\pi n x$.

Entonces $S = \{1, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\}$ es un conjunto infinito ortonormal.

Las combinaciones lineales $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_n + i\,g_n) = cos\,2\pi nx + i\,sen\,2\pi nx$

$= e^{2\pi nx}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

también forman un conjunto ortonormal.

Nota: Los conjuntos ortonormales, son linealmente independientes.

TEOREMA 2. Un conjunto ortonormal de vectores no nulos es linealmente independientes.

Demostración.-

Si S es un conjunto ortogonal infinito de vectores no nulos en un espacio con producto interno dado, se elige un subconjunto finito $\{v_1, \cdots, v_m\}$ de S y se procede a la demostración.

Si S es un conjunto ortogonal finito de vectores no nulos en un espacio con producto interno dado, suponer que $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$.

Probemos que S es linealmente independiente:

Suponer que: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$ .... (1)

Se debe probar que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Veamos:

Explícitamente se multiplica, escalarmente, cada término de (1) por v_1, luego por v_2,... por v_m; y como resultado obtendremos $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Si queremos demostrar de manera general se procede del siguiente modo:

Suponer que $\mu = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$

Multiplicar por v_k: $\langle \mu, v_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha_i v_i, v_k\rangle$, $k = 1, \ldots, m$

$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle v_i, v_k\rangle$, donde $\langle v_i, v_k\rangle = 0$ para $i \neq k$

Si $i = k$ obtenemos: $\langle \mu, v_k\rangle = \alpha_k \langle v_k, v_k\rangle$

Entonces $\alpha_k = \frac{\langle \mu, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle}$, $\langle v_k, v_k\rangle \neq 0$

cuando $\mu = 0$, obtenemos: $\alpha_k = 0$, $\forall\, k = 1, \ldots, m$ ■

COROLARIO 1 Si un vector μ es combinación lineal de una sucesión ortogonal de vectores NO NULO $v_1,\ldots,v_m$, entonces μ es igual a la siguiente combinación lineal:

$$\mu=\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle \mu, v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k$$

Demostración:

En el teorema anterior se tenía: $\quad \mu=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_m v_m$

donde $\alpha_k=\frac{\langle \mu, v_k\rangle}{\|v_k\|^2}$, entonces $\quad \mu=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k v_k$

se reduce a: $\quad \mu=\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle \mu, v_k\rangle}{\|v_k\|}v_k$

PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

TEOREMA 3. Sea V un espacio con producto interno y sean $v_1,\ldots,v_n$ vectores independientes cualesquiera de V. Entonces se pueden construir vectores ortogonales $\mu_1,\ldots,\mu_n$ en V tales que para cada $k=1,2,\ldots,n$ el conjunto $S=\{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$ sea una base del subespacio generado por $v_1,\ldots,v_k$

Demostración

$v_1 \ \mu_1$
$v_2 \ \mu_2$
$\vdots \quad \vdots$
$v_k \ \mu_k$
$\vdots$
v_n

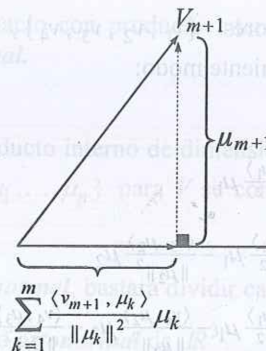
La construcción de los vectores ortogonales $\mu_1,\ldots,\mu_k$ es por un algoritmo conocido con el nombre de proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Primero: Asumimos que $\mu_1=v_1$.

Segundo: Supongamos que, por inducción, los vectores $\mu_1,\ldots,\mu_m$ $(1\le m\le n)$ hayan sido elegidos de modo que para cada k $\{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$, $1\le k\le m$ es una base ortogonal para el subespacio de V que es generado por $v_1,\ldots,v_k$.

El siguiente vector, después de μ_m es:

$$\boxed{\mu_{m+1}=v_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle v_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\mu_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



En (1) $\mu_{m+1}\neq 0$. De ser $\mu_{m+1}=0$, se tendría que v_{m+1} es combinación lineal de $\mu_1,\ldots,\mu_m$.

Además, se cumple que: $\langle \mu_{m+1},\mu_j\rangle=0$, si $1\le j\le m$.

Probemos:

$$\Big\langle \underbrace{v_{m+1}-\sum\frac{\langle \mu_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\mu_k}_{\mu_{m+1}},\ \mu_j\Big\rangle=\langle v_{m+1},\mu_j\rangle-\Big\langle \sum\frac{\langle \mu_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\mu_k,\ \mu_j\Big\rangle$$

$$=\langle v_{m+1},\mu_j\rangle-\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle \mu_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\langle \mu_k,\mu_j\rangle \ \ldots\ldots\ (2)$$

En (1) multiplicar, escalarmente, por el vector μ_j

$$\underbrace{\langle \mu_{m+1},\mu_j\rangle}_{0}=\langle v_{m+1},\mu_j\rangle-\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle v_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\langle \mu_k,\mu_j\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle v_{m+1},\mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\langle \mu_k,\mu_j\rangle=\langle v_{m+1},\mu_j\rangle \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Sustituir (3) en (2): $\langle \mu_{m+1},\mu_j\rangle=\underbrace{\langle v_{m+1},\mu_j\rangle-\langle v_{m+1},\mu_j\rangle}_{0}$

Por tanto, $\{\mu_1,\ldots,\mu_{m+1}\}$ es un conjunto ortogonal que consta de $m+1$ vectores no nulos en el subespacio generado por $v_1,\ldots,v_{m+1}$. Por el teorema 2, $\{\mu_1,\ldots,\mu_{m+1}\}$ es una base para el subespacio generado por $v_1,\ldots,v_{m+1}$.

De esta manera los vectores $\mu_1,\ldots,\mu_n$ pueden construirse uno después de otros de acuerdo al algoritmo dado en (1). ∎

En particular, si se tiene 4 vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, los vectores ortogonales $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ se obtienen del siguiente modo:

$$\mu_1 = v_1$$

$$\mu_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \mu_1\rangle}{\|\mu_1\|^2}\mu_1$$

$$\mu_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \mu_1\rangle}{\|\mu_1\|^2}\mu_1 - \frac{\langle v_3, \mu_2\rangle}{\|\mu_2\|^2}\mu_2$$

$$\mu_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, \mu_1\rangle}{\|\mu_1\|^2}\mu_1 - \frac{\langle v_4, \mu_2\rangle}{\|\mu_2\|^2}\mu_2 - \frac{\langle v_4, \mu_3\rangle}{\|\mu_3\|^2}\mu_3$$

Ejemplo 11 Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a los vectores $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (0,3,4)$ para obtener una base ortogonal para $I\!R^3$ con el producto interno canónico.

Solución:

Hallemos la ***base ortogonal*** $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ para $I\!R^3$.

$$\mu_1 = (1,0,1)$$

$$\mu_2 = (1,0,-1) - \frac{(1,0,-1)\cdot(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)$$

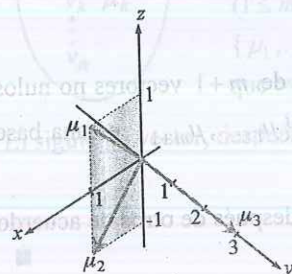
$$= (1,0,-1) - (0,0,0)$$

$$= (1,0,-1)$$

$$\mu_3 = (0,3,4) - \frac{(0,3,4)\cdot(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) - \frac{(0,3,4)\cdot(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)$$

$$= (0,3,4) - \tfrac{4}{2}(1,0,1) - \tfrac{-4}{2}(1,0,-1)$$

$$= (0,3,0)$$



Luego $\{(1,0,1), (1,0,-1), (0,3,0)\}$ es una base ortogonal de $I\!R^3$.
(μ_1, μ_2, μ_3)

COROLARIO 2 Todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ***ortonormal.***

Demostración:

Sean V un espacio con producto interno de dimensión infinita y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V. Una base ***ortogonal*** $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ para V se construye aplicando el proceso de Gram-Schmidt.

Para obtener una base ***ortonormal***, bastará dividir cada vector μ_k entre su norma $\|\mu_k\|$.

$\left\{\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}, \ldots, \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}\right\}$ es una base ***ortonormal*** de $I\!R^3$.

Ejemplo 12

En el ejemplo 11, se obtuvo la base ***ortogonal*** $\{(1,0,1), (1,0,-1), (0,3,0)\}$.

La base ***ortonormal*** es $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,3,0)\right\}$

Importancia de las bases ortonormales.

Cuando se conoce una base ortogonal $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ del espacio vectorial V con producto interno definido, cada vector $v \in V$ es combinación lineal de los vectores $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Aplicando el corolario 1, el vector $v \in V$, es:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, \mu_k\rangle}{\|\mu_k\|^2}\mu_k$$

Si retomamos el ejemplo 11, tenemos que $\{(1,0,1), (1,0,-1), (0,3,0)\}$ es una base ortogonal de $V = I\!R^3$, entonces cada vector $v = (x_1, x_2, x_3)$ de $I\!R^3$ es:
(μ_1, μ_2, μ_3)

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1,x_2,x_3)\cdot(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) + \frac{(x_1,x_2,x_3)\cdot(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1) + \frac{(x_1,x_2,x_3)\cdot(0,3,0)}{\|(0,3,0)\|^2}(0,3,0)$$

$$= \frac{x_1 + x_3}{2}\mu_1 + \frac{x_1 - x_3}{2}\mu_2 + \tfrac{1}{3}x_2\,\mu_3$$

En particular: $(2,1,3) = \tfrac{5}{2}(1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,0,-1) + \tfrac{1}{3}(0,3,0)$

Por otra parte: la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $(I\!R^3)^*$, que es dual a la base $\{\underset{\mu_1}{(1,0,1)}, \underset{\mu_2}{(1,0,-1)}, \underset{\mu_3}{(0,3,0)}\}$ esta definida explícitamente por:

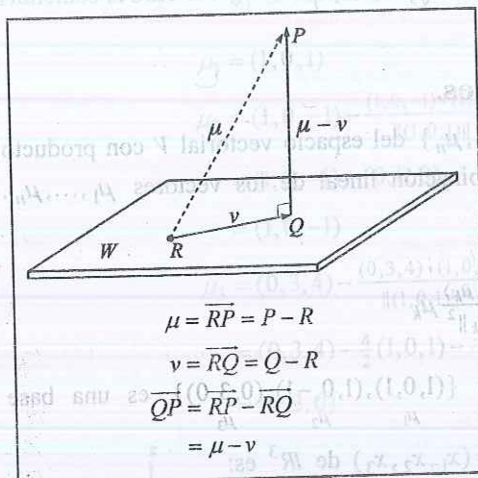
$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+x_3}{2}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{3}x_2$$

En general, cada funcional f_j es: $f_j(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{\langle (x_1,x_2,x_3), \mu_j \rangle}{\|\mu_j\|^2}$

En geometría del espacio hay un problema geométrico que se refiere a la distancia de un punto P de $V = I\!R^3$ a un plano $W = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \,/\, ax+by+cz=0\}$.



La distancia de P a W es la longitud del segmento PQ que es perpendicular al plano W.

$\|P-Q\|$ es la longitud del segmento PQ.

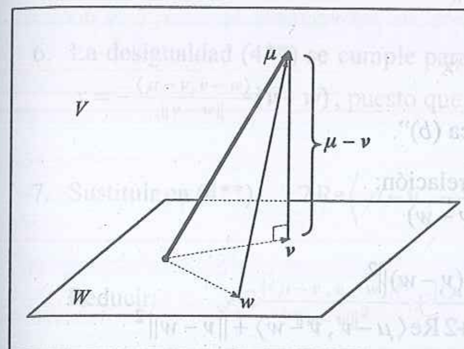
Tener en cuenta que toda recta contenida en el plano W es perpendicular a PQ.

Este problema se puede plantear así: dado un punto $P \in I\!R^3$ ¿existe algún punto $Q \in W$, tal que, $\|P-Q\|$ es la mínima longitud de las longitudes $\|P-R\|$ para todo $R \in W$?

En términos de vectores que pertenecen a un espacio vectorial V de producto interno, el planteamiento del problema es más elegante.

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V con producto interno y sea μ un vector arbitrario de V, existe un único vector $\nu \in W$, tal que $\|\mu-\nu\| \le \|\mu-w\| \;\; \forall\, w \in W$.

La longitud del vector $\mu-\nu$ es menor que la longitud de $\mu-w$ para todo vector w perteneciente al subespacio W.



Una ***mejor aproximación*** a μ por vectores de W es un vector ν de W, tal que $\|\mu-\nu\| \le \|\mu-w\|, \;\; \forall\, w \in W$ y $\mu-\nu$ será ortogonal al vector $w \in W$.

Este problema queda resuelto por el:

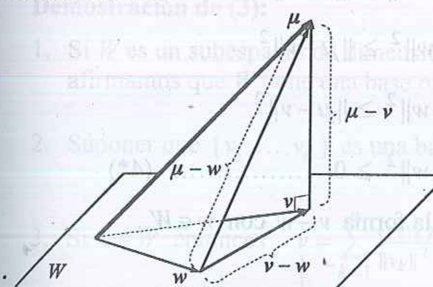
TEOREMA 4. Sea W un subespacio de un espacio con producto interno V y sea μ un vector de V.

1) El vector ν en W es una mejor aproximación a μ, por vectores de W si, y solo si, $\mu-\nu$ es ortogonal a todo vector de W.

2) Si existe una mejor aproximación a μ por vectores de W, es única.

3) Si W es de dimensión finita y $\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$ es cualquier base ortogonal de W, entonces el vector $\nu = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mu, \nu_k \rangle}{\|\nu_k\|^2}$ es la (única) mejor aproximación a μ por vectores de W.

Demostración:



- En (1) el enunciado: "ν es la mejor aproximación a μ", significa que $\|\mu-\nu\|$ es ínfimo si, y solo sí el vector $\mu-\nu$ es ortogonal a todo vector $w \in W$.
- En (2): ν es única.
- en (3): ν es combinación lineal de los vectores $\nu_1,\ldots,\nu_n$.

Demostración de (1):

Se debe demostrar la validez de dos condicionales: $(a) \longrightarrow (b)$ y $(b) \longrightarrow (a)$, donde:

(a) $\mu - \nu$ es ortogonal a todo vector de W.

(b) $\|\mu - \nu\| \leq \|\mu - w\|$, $\forall\, w \in W$.

Veamos:

($\Rightarrow$) $(a) \Rightarrow (b)$ "debo probar que (a) implica (b)".

1. En primer lugar, tener en cuenta la siguiente relación:
$$\mu - w = (\mu - \nu) + (\nu - w)$$

2. Aplicar **NORMA**: $\|\mu - w\|^2 = \|(\mu - \nu) + (\nu - w)\|^2$
$$= \|\mu - \nu\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle + \|\nu - w\|^2$$

3. Supongamos que $\mu - \nu$ es ortogonal a todo vector de W. Un vector de W es $\nu - w$, si $w \in W$, con $w \neq \nu$; $\nu \in W$ (por hipótesis).

   Si $\mu - \nu$ es ortogonal al vector $\nu - w$, entonces $\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle = 0$.

   Luego en 2. tendremos : $\|\mu - w\|^2 = \|\mu - \nu\|^2 + \|\nu - w\|^2$

   De aquí se deduce : $\|\mu - w\|^2 > \|\mu - \nu\|^2$, $\forall\, w \in W$

   Lo cual prueba que : $\|\mu - \nu\| < \|\mu - w\|$, $\forall\, w \in W$ ■

   Así hemos probado que (a) implica (b).

   ($\Leftarrow$) (b) $\Rightarrow$ (a)

4. Recíprocamente, supóngase $\|\mu - w\| \geq \|\mu - \nu\|$, $\forall\, w \in V$
$$\|\mu - w\|^2 \geq \|\mu - \nu\|^2$$

   Por 2. $\|\mu - \nu\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle + \|\nu - w\|^2 \geq \|\mu - \nu\|^2$

   Cancelar $\|\mu - \nu\|^2$: $2\operatorname{Re}\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle + \|\nu - w\|^2 \geq 0$ .... (4*)

   Como todo vector de W puede ser expresado en la forma $\nu - w$ con $w \in W$.

   Haciendo $\nu - w = x$, tendremos en (4*):

   (4**) .... $2\operatorname{Re}\langle \mu - \nu, x\rangle + \|x\|^2 \geq 0$, $\forall\, x \in W$

5. La proyección ortogonal del vector $\mu - \nu$ sobre el vector $\nu - w$ está dado por:
$$\frac{\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle}{\|\nu - w\|^2}(\nu - w)$$

6. La desigualdad (4**) se cumple para todo $x \in W$. En particular se cumple si elegimos $x = -\frac{\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle}{\|\nu - w\|}(\nu - w)$, puesto que $\nu \in W$, $w \in W$, $\nu \neq w$.

7. Sustituir en (4**): $2\operatorname{Re}\left\langle \mu - \nu, -\frac{\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle}{\|\nu - w\|^2}(\nu - w)\right\rangle + \left\| -\frac{\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle}{\|\nu - w\|^2}(\nu - w)\right\|^2 \geq 0$

   Reducir: $-2\frac{|\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle|^2}{\|\nu - w\|^2} + \frac{|\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle|^2}{\|\nu - w\|^2} \geq 0$
$$-\frac{|\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle|^2}{\|\nu - w\|^2} \geq 0$$

   Esta desigualdad no puede ser negativa, sólo podrá ser cero. Esto es: $\langle \mu - \nu, \nu - w\rangle = 0$

   Esta igualdad prueba que $\mu - \nu$ es ortogonal a $\nu - w$.

   Así hemos probado que (b) implica (a). ■

Demostración de (2): "ν es única".

La condición de ortogonalidad es satisfecha por, a lo más, un vector de W. Esto es, no habrá otro vector ν', tal que $\langle \mu - \nu', \nu' - w\rangle = 0$. Si lo hubiera, ocurrirá que $\nu' = \nu$.

Demostración de (3):

1. Si W es un subespacio de dimensión finita de V, entonces por el corolario del teorema 3, afirmamos que W tiene una base ortogonal.

2. Suponer que $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ es una base ortogonal cualquiera de W.

3. Si $\nu \in W$ entonces $\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \nu, \nu_k\rangle}{\|\nu_k\|^2}\nu_k$

   ν es combinación lineal de los vectores $\nu_1, \ldots, \nu_n$

4. Por los cálculos hechos en el teorema 3, el vector $\mu - \nu$ es ortogonal a cada uno de los vectores v_k ($\mu - \nu$ es el vector obtenido en la última etapa cuando se aplica el proceso de ortogonalización a $v_1, \ldots, v_n, \mu$).

Así $\mu - \nu$ es ortogonal a toda combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$, es decir a todo vector en W. si $w \in W$ y $w \neq \nu$, se sigue que $\|\mu - w\| \geq \|\mu - \nu\|$.

Conclusión: ν es la mejor aproximación a μ que está en W.

COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UN SUBCONJUNTO H

Definición.- Sea V un espacio con producto interno y H cualquier conjunto de vectores en V. El ***complemento ortogonal*** de H es el conjunto $H^{\perp}$ de los vectores de V ortogonales a todo vector de H.

Esto es $\quad \nu \in H^{\perp} \iff \langle \nu, \mu \rangle = 0 \quad , \quad \forall \mu \in H$

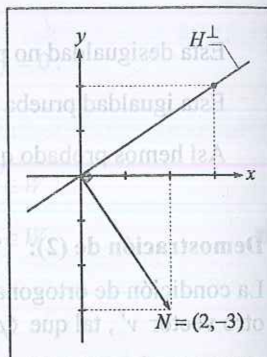
o sea $\quad H^{\perp} = \{\nu \in V : \langle \nu, \mu \rangle = 0 \quad , \quad \forall \mu \in H\}$

Ejemplo 01

a) $\{(2,-3)\}^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(2,-3) \rangle = 0\} = H^{\perp}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y = 0\}$, $H = \{(2,-3)\}$

$= \ldots$ es una recta que pasa por (0,0) y (2,–3) es el vector normal a la recta.



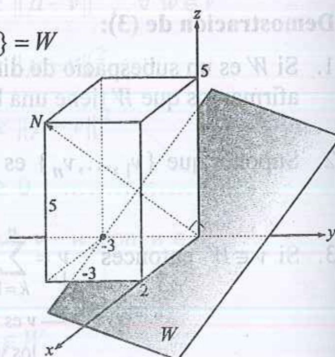
Todos los vectores de $\{(2,-3)\}^{\perp} = H^{\perp}$ son ortogonales al vector $(2,-3)$.

b) $\{(2,-3,5)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(2,-3,5) \rangle = 0\} = W$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 5z = 0\}$

= es un plano que pasa por (0,0,0), donde

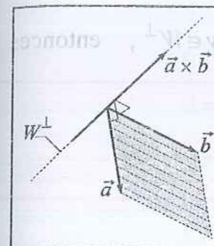
$N = (2,-3,5)$ es el vector normal al plano W



Todos los vectores de $\{(2,-3,5)\}^{\perp} = W$ son ortogonales al vector $(2,-3,5)$.

$W = \{N\}^{\perp}$

c) $\{(1,2,-1),(2,3,1)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,2,-1) \rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z),(2,3,1) \rangle = 0\} = W^{\perp}$



$W = \{(1,2,-1),(2,3,1)\}$

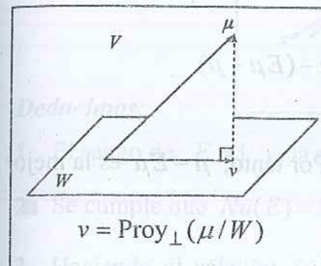
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \ \wedge \ 2x + 3y + z = 0\}$

$= \{z(-5,3,1) : z \in \mathbb{R}\}$

= {es una recta en $\mathbb{R}^3$, cuyo vector dirección es $(-5,3,1)$}

$\vec{a} = (2,3,1) \quad , \quad \vec{b} = (1,2,-1) \quad , \quad \vec{a} \times \vec{b} = (-5,3,1)$

Definición 5. Siempre que exista el vector ν en el Teorema 4 se le llama **proyección ortogonal de μ sobre W**. Si todo vector de V tiene proyección ortogonal sobre W, la aplicación que asigna a cada vector de V su proyección ortogonal sobre W, se llama **proyección ortogonal de V sobre W**.

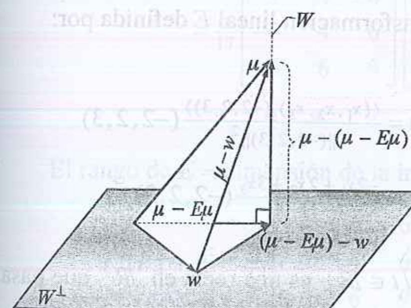


$$\text{Proy}_{\perp} : V \longrightarrow W$$
$$\mu \longmapsto \text{Proy}_{\perp}(\mu / W) = \nu$$

La aplicación $\text{Proy}_{\perp}$ se llama **PROYECCIÓN ORTOGONAL** de V sobre W.

COROLARIO 4.1 Sean: V un espacio con producto interno, W un subespacio de dimensión finita y E la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces la aplicación $\mu \longrightarrow (\mu - E\mu)$ es la proyección ortogonal de V sobre $W^{\perp}$.

Demostración.-



Sea μ un vector arbitrario de V.

a) $(\mu - E\mu) \in W^{\perp}$

b) $w \in W^{\perp}$

c) $E\mu$ = proyección de μ sobre W.

d) Para cualquier $w \in W^{\perp}$ se tiene $\mu - w = E\mu + (\mu - E\mu) - w$

W es normal el plano $W^{\perp}$

Dado el vector $\mu \in V$, debemos demostrar que el vector $(\mu - E\mu) \in W^{\perp}$ es la mejor aproximación a μ por vectores de $W^{\perp}$. Esto es, si $w \in W^{\perp}$, entonces $\|\mu-(\mu-E\mu)\| \leq \|\mu-w\|$.

Veamos:

Por demostrar que $\mu-(\mu-E\mu)$ es ortogonal a $W^{\perp}$.

Se tiene que : $\mu - w = E\mu + (\mu - E\mu) - w$

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\|\mu-w\|^2 = \|E\mu\|^2 + \|\mu - E\mu - w\|^2$$

Se deduce : $\|\mu-w\|^2 \geq \|E\mu\|^2$, donde $E\mu = \mu-(E\mu-\mu)$

Que es : $\|\mu-w\|^2 \geq \|\mu-(E\mu-\mu)\|^2$

Cuando $w \neq \mu - E\mu$, la desigualdad es estrictamente mayor. Por tanto, $\mu - E\mu$ es la mejor aproximación a μ para vectores en $W^{\perp}$. ∎

Ejemplo 02 Si se da a $I\!R^3$ el producto interno canónico, podemos hacer:

a) La proyección ortogonal del vector $(-1,1,6)$ sobre el subespacio $W = \{t(-2,2,3) / t \in I\!R\}$

$$v = \text{Proy}_{(-2,2,3)}(-1,1,6) = \frac{\langle(-1,1,6)\bullet(-2,2,3)\rangle}{\|(-2,2,3)\|^2}(-2,2,3)$$

$$v = \frac{22}{17}(-2,2,3)$$

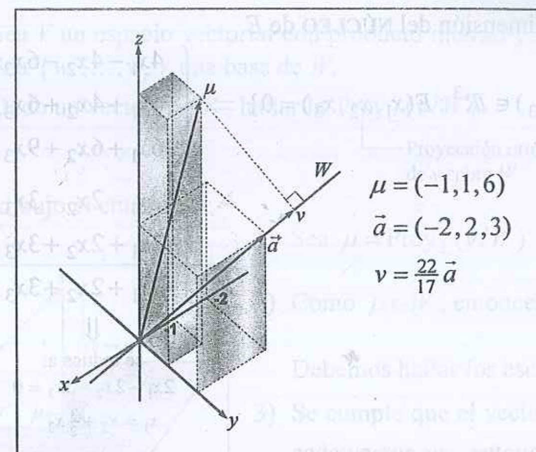
b) La proyección ortogonal de $I\!R^3$ sobre W es la transformación lineal E definida por:

$$E: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$$

$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto E(x_1,x_2,x_3) = \text{Proy}_{\perp}(I\!R^3/W) = \frac{\langle(x_1,x_2,x_3),(-2,2,3)\rangle}{\|(-2,2,3)\|^2}(-2,2,3)$$

$$= \frac{-2x_1+2x_2+3x_3}{17}(-2,2,3)$$

Geométricamente, el subespacio $W = \{t(-2,2,3)/t \in I\!R\}$ es una recta en $I\!R^3$ que pasa por el origen y $\vec{a} = (-2,2,3)$ es el vector dirección de la recta.



Deducimos:

1. El rango de $E = 1$ y la nulidad de $E = 2$.
2. Se cumple que $Nu(E) = W^{\perp}$, $Nu(E)$: núcleo de E y por tanto $\dim(W^{\perp}) = 2$.
3. Haciendo el cálculo: $\underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{I} - \underbrace{E(x_1,x_2,x_3)}_{E}$, se obtiene $I - E = \text{Proy}_{\perp}(I\!R^3/W^{\perp})$, que es una transformación lineal que aplica el vector $(x_1,x_2,x_3) - E(x_1,x_2,x_3)$.

La justificación es:

1. La proyección ortogonal E expresado en forma matricial es:

$$E(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{17}(4x_1 - 4x_2 - 6x_3, -4x_1 + 4x_2 + 6x_3, -6x_1 + 6x_2 + 9x_3)$$

$$= \frac{1}{17}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -4 & 4 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El rango de E = dimensión de la imagen de E = rango de la transpuesta de la matriz:

$$[E] = A^t = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -4 & 4 & 6 \\ -6 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como notamos: el rango de $A^t = 1$, A^t: TRANSPUESTA de A.

La nulidad de E = dimensión del **NÚCLEO** de E.

$$Nu(E)=\{(x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3 : E(x_1,x_2,x_3)=0\} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1-4x_2-6x_3=0 \\ -4x_1+4x_2+6x_3=0 \\ -6x_1+6x_2+9x_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=0 \\ -2x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

se reduce a:

$2x_1-2x_2-3x_3=0$

$x_1=x_2+\frac{3}{2}x_3$

$Nu(E)=\{(x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3 : 2x_1-2x_2-3x_3=0\}$ = es un plano en $I\!R^3$ que pasa por (0,0,0)

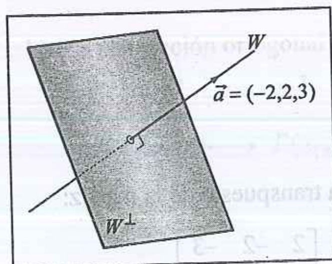
Luego, $(x_1,x_2,x_3)=\left(x_2+\frac{2}{3}x_3, x_2, x_3\right)$

$\qquad = x_2(1,1,0)+x_3\left(\frac{2}{3},0,1\right)$

Entonces $Nu(E)=gen\left\{(1,1,0),\left(\frac{2}{3},0,1\right)\right\}$. Luego, $\dim Nu(E)=2$

2. Comparando el subespacio vectorial $W=\{t(-2,2,3): t\in I\!R\}$ con el

$Nu(E)=\{(x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3 : 2x_1-2x_2-3x_3=0\}$



observamos que:

$Nu(E)=W^{\perp}=\{(-2,2,3)\}^{\perp}$

cualquier vector de W es normal al plano $W^{\perp}$.

3. $I-E: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$

$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,x_2,x_3)-E(x_1,x_2,x_3)$

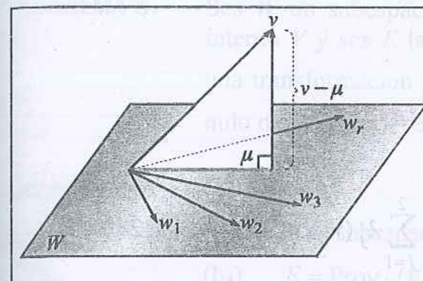
Problema 01 Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio de V. Sea $\{w_1,\ldots,w_r\}$ una base de W.

Dado un vector $v\in V$, hallar la $\text{Proy}_{\perp}(v/W)$.

Proyección ortogonal de v sobre W.

Solución:

Ilustremos con un dibujo el enunciado:



1) Sea $\mu=\text{Proy}_{\perp}(v/W)$

2) Como $\mu\in W$, entonces $\mu=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j w_j$

Debemos hallar los escalares λ_j

3) Se cumple que el vector $v-\mu$ es ortogonal a cada vector w_k, entonces

$\langle v-\mu, w_k\rangle=0$, $k=1,\ldots,r$

$\langle v,w_k\rangle-\langle \mu,w_k\rangle=0$

$\langle v,w_k\rangle=\langle \mu,w_k\rangle$ .... (3*)

(4) Para calcular (3*), multiplicar escalarmente el vector μ dado en (2) por cada vector w_k, obteniéndose:

$$\langle \mu,w_k\rangle=\sum_{j=1}^{r}\langle \lambda_j w_j, w_k\rangle \quad , \quad k=1,\ldots,r$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\langle w_j,w_k\rangle \text{ .... (4*)}$$

(5) Sustituir (4*) en (3*): $\boxed{\langle v,w_k\rangle=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\langle w_j,w_k\rangle}$ ⟸ es un sistema de ecuaciones lineales con r ecuaciones y r incógnitas que nos permite hallar los λ_j.

El determinante de este sistema se llama el ***gramiano*** de $w_1,\ldots,w_r$ y se denota por $G(w_1,\ldots,w_r)=\det[\langle w_j,w_k\rangle]$.

Ejemplo 03 (Aplicación particular del problema 1)

a) Hallar la proyección de $v_0=(1,3,6)$ sobre el subespacio

$W=\{(x_1,x_2,x_3)\in I\!R^3 / x_1-3x_2-3x_3=0\}$

b) Hallar la distancia de v_0 al subespacio W.

Solución:

1) Se pide hallar el vector $\mu = \text{Proy}_\perp(v_0/W)$; donde $\mu = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j w_j$; $\lambda_j = ?$

2) Necesitamos conocer una base de W.

$$(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + 3x_3, x_2, x_3) = x_2(3,1,0) + x_3(3,0,1)$$

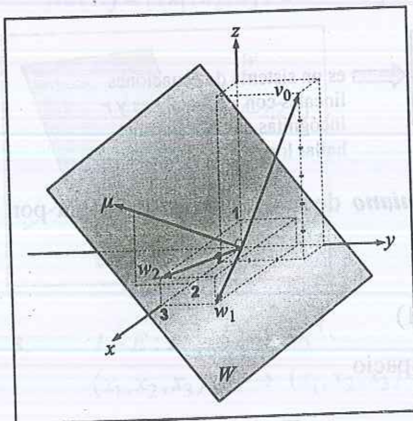
Una base de W es $\{\underset{w_1}{(3,1,0)}, \underset{w_2}{(3,0,1)}\}$

3) Para hallar los λ_j, resolver el sistema: $\langle v_0, w_k\rangle = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \langle w_j, w_k\rangle$, $k = 1,2$

$$\begin{cases} \langle v_0, w_1\rangle = \lambda_1\langle w_1, w_1\rangle + \lambda_2\langle w_2, w_1\rangle \\ \langle w_0, w_2\rangle = \lambda_1\langle w_1, w_2\rangle + \lambda_2\langle w_2, w_2\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle(1,3,6),(3,1,0)\rangle = \lambda_1\langle(3,1,0),(3,1,0)\rangle + \lambda_2\langle(3,0,1),(3,1,0)\rangle \\ \langle(1,3,6),(3,0,1)\rangle = \lambda_1\langle(3,1,0),(3,0,1)\rangle + \lambda_2\langle(3,0,1),(3,0,1)\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = 10\lambda_1 + 9\lambda_2 \\ 9 = 9\lambda_1 + 10\lambda_2 \end{cases} \quad \text{Resolviendo el sistema se obtiene} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{21}{19} \\ \lambda_2 = \frac{36}{19} \end{cases}$$



Entonces el vector

$\mu = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, es:

$$\mu = -\tfrac{21}{19}(3,1,0) + \tfrac{36}{19}(3,0,1)$$

$$= \left(\tfrac{45}{19}, \tfrac{-21}{19}, \tfrac{36}{19}\right) \approx (2.3, -1.1, 1.8)$$

μ es el vector proyección del vector v_0 sobre el plano W.

b) La distancia de v_0 al subespacio W es $d(v_0, W) = \|v_0 - \text{Proy}_\perp(v_0/W)\|$

Esto es: $d(v_0, w) = \left\|(1,3,6) - \left(\tfrac{45}{19}, \tfrac{-21}{19}, \tfrac{36}{19}\right)\right\|$

$$= \sqrt{\left(-\tfrac{26}{19}\right)^2 + \left(\tfrac{78}{19}\right)^2 + \left(\tfrac{78}{19}\right)^2} = \tfrac{1}{19}\sqrt{12844} \approx 5.96$$

TEOREMA 5. Sea W un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno V y sea E la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces E es una transformación lineal idempotente de V sobre W, $W^\perp$ es el espacio nulo de E y $V = W \oplus W^\perp$.

Demostración:

La hipótesis son: (h₁) W es subespacio de V.

(h₂) $E = \text{Proy}_\perp(V/W)$

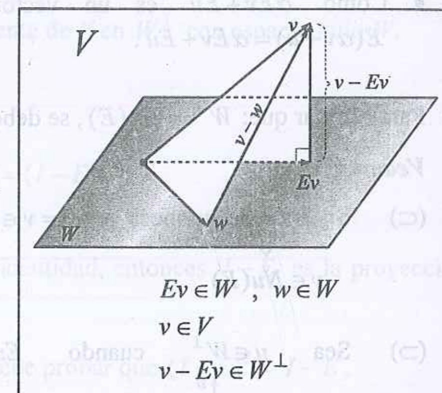
Por demostrar:

a) $E: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal
$v \longrightarrow Ev$

b) E es idempotente, esto es, $E^2 = E$

c) $W^\perp = Nu(E)$

d) $V = W \oplus W^\perp$



Veamos:

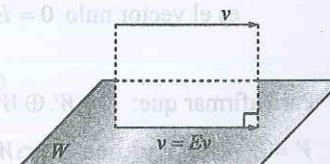
Sea $v \in V$. Entonces el vector proyección Ev es la mejor aproximación al vector v, esto es $\|v - Ev\| \leq \|v - w\|$, $\forall\, w \in W$.

b) Cuando $v \in W$ se cumple: $Ev = v$ (Proyección de v coincide con v).

Por tanto $E(Ev) = Ev$

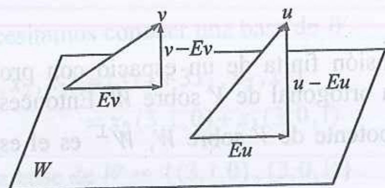
$E^2 v = Ev$, $\forall\, v \in W$

Esto prueba que E es idempotente.



a) Se debe probar que: $E(\alpha v+u)=\alpha Ev+Eu$, siendo v, u vectores de V y $\alpha \in I\!K$.

- Por el teorema 4 se tiene que $v-Ev$ y $u-Eu$ son vectores ortogonales a todo vector de W, lo cual implica que $v-Ev$ y $u-Eu$ son vectores de $W^{\perp}$.



- Como $W^{\perp}$ es un subespacio, entonces

$$\alpha(v-Ev)+(u-Eu)=(\alpha v+u)-(\alpha Ev+Eu)$$

es un vector de $W^{\perp}$. Esto implica que el vector $(\alpha v+u)-(\alpha Ev+Eu)$ es ortogonal al subespacio W.

- Como $\alpha Ev+Eu$ es un vector de W, se sigue del teorema 4, que $E(\alpha v+u)=\alpha Ev+Eu$.

c) Para afirmar que: $W^{\perp}=Nu(E)$, se debe probar que $Nu(E)\subset W^{\perp} \;\wedge\; W^{\perp}\subset Nu(E)$

Veamos:

($\subset$) Si $Ev=0$ entonces $v-0=v\in W^{\perp}$

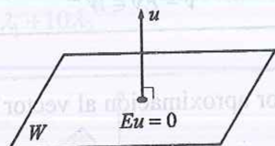
$\Downarrow$

$v\in Nu(E)$

($\supset$) Sea $u\in W^{\perp}$ cuando $Eu=0$

$\Downarrow$

$u\in Nu(E)$



La proyección ortogonal de cualquier u, vector "*perpendicular*" al plano W, es el vector nulo $0=Eu$.

d) Para afirmar que: $V=W\oplus W^{\perp}$, se debe probar que:

$V=W+W^{\perp}$ y que $W\cap W^{\perp}=\{0\}$.

Veamos:

- La ecuación $v = Ev + (v-Ev)$

  $(v-Ev)$ es un elemento de $W^{\perp}$

  Ev es un elemento de W.

  v es un elemento de V.

  muestra que $V=W+W^{\perp}$

- Si $w\in W\cap W^{\perp}$ entonces $w\in W \;\wedge\; w\in W^{\perp}$, lo cual implica que $\langle w,w\rangle=0$. Esta igualdad sólo es verdadero cuando $w=0$. Lo cual prueba que $W\cap W^{\perp}=\{0\}$.

COROLARIO 5.1. Bajo las condiciones del teorema 5, se cumple:

a) $I-E$ es la proyección ortogonal de V en $W^{\perp}$

b) $I-E$ es una transformación lineal idempotente de V en $W^{\perp}$ con espacio nulo W.

Demostración:

Se tiene la aplicación $\quad I-E:V \longrightarrow W^{\perp}$

$$v \longmapsto v-Ev=(I-E)(v)$$

que es la proyección ortogonal de V sobre $W^{\perp}$.

a) Como E es una transformación lineal, I es identidad, entonces $I-E$ es la proyección lineal sobre $W^{\perp}$.

b) Para afirmar que $I-E$ es idempotente, se debe probar que $(I-E)^2=I-E$.

Veamos:

$$(I-E)^2=(I-E)(I-E)=I-E-E+E^2 \quad . \text{ Pero } E^2=E$$

$$=I-E-E+E$$

$$=I-E$$

c) Por demostrar que $Nu(I-E)=W^{\perp}$.

Veamos:

La igualdad $(I-E)(v)=0$ se cumple s.s.s $v-Ev=0$

$\Downarrow$

$v\in Nu(I-E)$

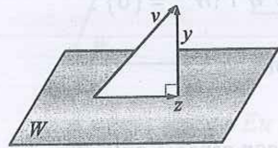
s.s.s. $v=Ev$ y esta igualdad se cumple s.s.s. $v\in W^{\perp}$

Por tanto, $W^{\perp}$ es el subespacio nulo de $I-E$. ■

COROLARIO 5.2. (desigualdad de Bessel)

Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio con producto interno V. Si v es cualquier vector de V, entonces $\sum_k \frac{|\langle v,u_k\rangle|^2}{\|u_k\|^2} \le \|v\|^2$ y la desigualdad vale si, y solo si, $v=\sum_k \frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$

Demostración.



- Sea $W=gen\{u_1,\ldots,u_n\}$ es subespacio generado por los vectores ortogonales $u_1,\ldots,u_n$.
- Dado el vector $v\in V$, elegir el vector $z=\mathrm{Proy}_\perp(v/W)$. Siendo así, tendremos que $v-z=y$ es un vector ortogonal al subespacio W.

- De $v-z=y$ obtenemos: $v=z+y$, del cual deducimos que:

  a) $\|v\|^2=\|z\|^2+\|y\|^2$ .... (Teorema de Pitágoras)

  b) $z=\sum_k \frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$ .... (Toerema 4)

- En b) multiplicar escalarmente por z, obteniéndose:

$$\|z\|^2=\sum_k \frac{\langle v,u_k\rangle^2}{\|u_k\|^2}\ ,\ \text{donde } \langle v,u_k\rangle^2=|\langle v,u_k\rangle|^2 \ \text{ y } \ \langle u_j,u_k\rangle=0\ ,\ \forall\, j\ne k.$$

- Por otro lado, de a) deducimos: $\|z\|^2\le\|v\|^2$; esto es: $\sum_k \frac{|\langle v,u_k\rangle|^2}{\|u_k\|^2}\le\|v\|^2$ ■

Nota: 1. Si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es un conjunto ortogonal, la desigualdad de Bessel dice que:

$$\sum_k|\langle v,u_k\rangle|^2\le\|v\|^2$$

2. Si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces cada vector $v\in V$ es: $v=\sum_k\langle v,u_k\rangle u_k$, donde $\langle v,u_k\rangle$ es la k-ésima coordenada de v en la base ordenada $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Ejemplo geométrico

- Demos dos bases ortonormales de $V=I\!R^2 : \beta=\{(1,0),(0,1)\}$ (e_1, e_2) y $\beta'=\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$ (μ_1, μ_2)

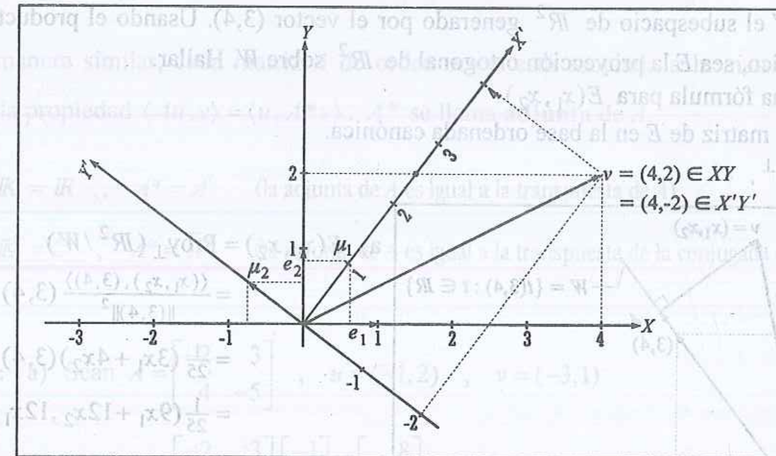
Sea $v=(4,2)$ un vector de V.

a) Las coordenadas de v en la base canónica β son 4 y 2.

b) Las coordenadas de v en la base β' son: (α_1,α_2)

donde: $\alpha_1=\left\langle(4,2),\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right\rangle=\frac{12}{5}+\frac{8}{5}=4$

$\alpha_2=\left\langle(4,2),\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\rangle=\frac{-16}{5}+\frac{6}{5}=-2$



EJEMPLO RELATIVO A LA DESIGUALDAD DE BESSEL

Sea el espacio vectorial $V=\{f:[0,1]\longrightarrow I\!R \,/\, f$ es continua en $[0,1]\}$ un producto interno en V está definido por $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$.

Una base de V está formado por las funciones $\mu_n=e^{2\pi i n t}$, $n=\pm1\pm2\ldots$

La desigualdad de Bessel es: $\sum|\langle f,\mu_n\rangle|^2\le|f|^2$

Esto es $$\sum_{k=-n}^{n}\left|\int_0^1 f(t)e^{-2\pi i k t}\right|^2\le\int_0^1|f(t)|^2\,dt$$

PROBLEMAS:

01 Sea V un espacio producto interno y sean v, u vectores de V. Demostrar que $v = u$ si, y solo si, $\langle v,w\rangle = \langle u,w\rangle$ para todo $w \in V$.

Prueba

$(\Leftarrow)$ Si $\langle v,w\rangle = \langle u,w\rangle$, entonces $\langle v,w\rangle - \langle u,w\rangle = 0 \quad ; \quad \forall\, w \in V$

$\Rightarrow \quad \langle v-u,w\rangle = 0 \quad ; \quad \forall\, w \in V$

$\Rightarrow \quad v-u = 0$

$\Rightarrow \quad v = u$

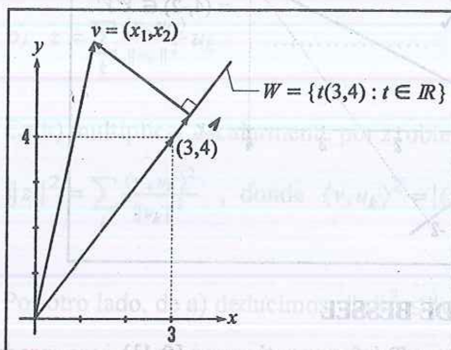
$(\Rightarrow)$ Queda como ejercicio.

02 Sea W el subespacio de $I\!R^2$ generado por el vector (3,4). Usando el producto interno canónico, sea E la proyección ortogonal de $I\!R^2$ sobre W. Hallar.

a) Una fórmula para $E(x_1, x_2)$.

b) La matriz de E en la base ordenada canónica.

c) $W^{\perp}$.



a) $E(x_1,x_2) = \text{Proy}_{\perp}(I\!R^2/W)$

$= \dfrac{\langle (x_1,x_2),(3,4)\rangle}{\|(3,4)\|^2}(3,4)$

$= \frac{1}{25}(3x_1+4x_2)(3,4)$

$= \frac{1}{25}(9x_1+12x_2, 12x_1+16x_2)$

b) La matriz de E en la base ordenada canónica es:

$A = [E]_\beta = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica en $I\!R^2$

Se cumple: $A^2 = A$

c) $W^{\perp} = \{(x_1,x_2) \in I\!R^2 : \langle (x_1,x_2).(3,4)\rangle = 0\}$

$= \{(x_1,x_2) \in I\!R^2 : 3x_1 + 4x_2 = 0\}$

7.5 LA ADJUNTA

El producto interno que se define sobre los espacios vectoriales V y W de dimensión finita nos permite asociar a cada transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ una nueva transformación lineal $T^* : W \longrightarrow V$ llamada la **adjunta** de T, que están relacionadas por la igualdad $\langle Tu, w\rangle = \langle u, T^* w\rangle$, para todo $u \in V$ y $w \in W$.

Más importante resulta cuando a cada operador $T : V \longrightarrow V$ asociamos el nuevo operador $T^* : V \longrightarrow V$ que cumple la propiedad $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T_v^*\rangle$, llamado la **adjunta** de T.

De manera similar, cada matriz A de orden $n \times n$ está asociada a la matriz A^* que cumple la propiedad $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$. A^* se llama **adjunta** de A.

Si $I\!K = I\!R$, $A^* = A^t$ (la adjunta de A es igual a la transpuesta de A)

Si $I\!K = \mathbb{C}$, $A^* = \bar{A}^t$ (la adjunta de A es igual a la transpuesta de la conjugada de A)

Ejemplo: a) Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $u = (-1,2)$, $v = (-3,1)$

Tenemos: $Au = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$

$A^* = A^t = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $A^* v = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -14 \end{bmatrix}$

Ahora: $\langle Au, v\rangle = \langle (8,-14),(-3,1)\rangle = -24 - 14 = -38$

$\langle u, A_v^*\rangle = \langle (-1,2),(10,-14)\rangle = -10 - 28 = -38$

A continuación se explican la existencia de la **adjunta** de T (T^*) y otras propiedades de T^*.

TEOREMA DE RIEZ

TEOREMA 6. Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita y f un funcional sobre V. Entonces, existe un único vector w de V tal que $f(u)=\langle u,w\rangle$ para todo $u\in V$.

Demostración.

Hipótesis h_1 : V e.p.i. de $\dim V<\infty$

h_2 : $f:V\longrightarrow I\!K$ un funcional sobre V.

Tesis $\exists!\, w\in V$ tal que $f(u)=\langle u,w\rangle$

Veamos:

1) Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base ortogonal de V .... (por h_1)

2) Hacer $w=\sum_{j=1}^{n}\overline{f(u_j)}u_j$, ... $(w\in V)$

3) y sea f_w el funcional lineal definida por $f_w(\bullet)=\langle\bullet,w\rangle$. Fijar el vector w, mediante f, debo probar que todo vector $u\in V$ tiene imagen $f(u)$. En particular cada u_k tiene imagen $f(u_k)$.

4) En 3) evaluar la función f_w en u_k :

Entonces $f_w(u_k)=\left\langle u_k,\sum_j\overline{f(u_j)}u_j\right\rangle$; donde $\langle u_k,u_j\rangle=0$, si $k\neq j$

$$=0+0+\ldots+f(u_k)\underbrace{\langle u_k,u_k\rangle}_{1}+0+\ldots+0$$

$$f_w(u_k)=f(u_k)$$

5) Como esta igualdad es verdadero para todo u_k, confirma que $f_w=f$. Es decir, la función f queda bien definida para un vector fijo w, tal que $f_w=\langle u,w\rangle$, $\forall\, u\in V$.

UNICIDAD

Suponer que existe otro $w'\in V$. Debo probar que $w=w'$.

Veamos:

$\forall\, u\in V$, suponer que $\langle u,w\rangle=\langle u,w'\rangle$

$\iff \langle u,w\rangle-\langle u,w'\rangle=0$

$\iff \langle u,w-w'\rangle=0$

$\iff w-w'=0$

$\iff w=w'$ ■

Problema 01 Con las hipótesis del teorema 6: si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base ortonormal de V, al elegir dos vectores: v y w de V, tendremos que:

$v=x_1u_1+\ldots+x_nu_n$ .... (v es combinación lineal de los u_j)

$w=y_1u_1+\ldots+y_nu_n$ .... (w es combinación lineal de los u_j)

El producto interno de v por w es definido por $\langle v,w\rangle=x_1\overline{y}_1+\ldots+x_n\overline{y}_n$.

Si $f:V\longrightarrow I\!K$ es un funcional sobre V, probar que:

a) $f(v)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$, donde $c_j=f(u_j)$

b) Encontrar un vector w en V tal que $\langle v,w\rangle=f(v)$, $\forall\, v\in V$.

Demostración:

a) En $v=x_1u_1+\ldots+x_nu_n$ aplicar f

$f(v)=x_1f(u_1)+\ldots+x_nf(u_n)$. Hacer $f(u_j)=c_j$

$\boxed{f(v)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n}$ (como vemos f es un funcional bien definida)

b) Si se tiene: $\langle v,w\rangle=f(v)$, $\forall\, v\in V$

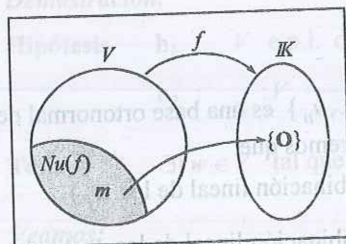
$x_1\overline{y}_1+\ldots+x_n\overline{y}_n=x_1f(u_1)+\ldots+x_nf(u_n)$

$$\text{Entonces}\begin{cases}\overline{y}_1=f(u_1)\longrightarrow y_1=\overline{f(u_1)}\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ \overline{y}_n=f(u_n)\longrightarrow y_n=\overline{f(u_n)}\end{cases}$$

En consecuencia: $w=\overline{f(u_1)}u_1+\ldots+\overline{f(u_n)}u_n$.

Como apreciamos, sabiendo que $f(v)=\langle v,w\rangle$, hemos hallado el vector w con coordenadas $\overline{f(u_k)}$ en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Problema 02 Según el teorema 6, se tiene: $\beta\in(Nu(f))^{\perp}$

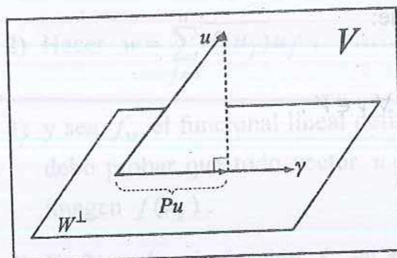


Justificación: $\forall\, m\in Nu(f)\Rightarrow f(m)=0$. Pero $f(v)=\langle v,w\rangle$, w es fijo; entonces $f(m)=\langle m,w\rangle=0$.

La igualdad $\langle m,w\rangle=0$ implica que $w\in(Nu(f))^{\perp}$.

Sea $W=Nu(f)$, entonces $V=W+W^{\perp}$ y f está completamente determinado por sus valores en $W^{\perp}$.

En efecto, si $P=\text{Proy}_{\perp}(V/W^{\perp})$, entonces $f(u)=f(Pu)$, $\forall\, u\in V$.



Supongamos que $f\neq 0$, $[f(u)=\langle u,w\rangle]$, w fijo.

Entonces f es el rango 1 y $\dim(W^{\perp})=1$

Si $\gamma\in W^{\perp}$, entonces $Pu=\text{Proy}_{\perp}(u/\gamma)=\dfrac{\langle u,\gamma\rangle}{\|\gamma\|^2}\gamma$,

$\forall\, u\in V$

Aplicar f en Pu: $f(Pu)=f\left(\dfrac{\langle u,\gamma\rangle}{\|\gamma\|^2}\gamma\right)$

$$f(Pu)=\langle u,\gamma\rangle\cdot\frac{f(\gamma)}{\|\gamma\|^2}$$

- Sustituir en $f(u)=f(Pu)$

$$\langle u,w\rangle=\langle u,\gamma\rangle\cdot\frac{f(\gamma)}{\|\gamma\|^2}$$

$$=\left\langle u,\gamma\frac{\overline{f(\gamma)}}{\|\gamma\|^2}\right\rangle$$

- Esta igualdad se cumple sólo cuando $w=\gamma\dfrac{\overline{f(\gamma)}}{\|\gamma\|^2}$

NOTA: El teorema de Riez no es válido si el espacio vectorial V no es de dimensión finita.

Existencia de la adjunta T^*

TEOREMA 7. Para cualquier operador lineal T en un espacio con producto interno de dimensión finita, existe un único operador T^* sobre V tal que: $\langle Tu,w\rangle=\langle u,T^*w\rangle$, para todo u, w de V.

Demostración:

Hipótesis $\begin{cases} h_1) & T:V\longrightarrow V \text{ es un operador lineal.}\\ h_2) & V \text{ es un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.}\end{cases}$

Tesis $\{\ \exists!$ operador lineal $T^*:V\longrightarrow V$, tal que $\langle Tu,w\rangle=\langle u,T_w^*\rangle$.

a) Probemos la existencia de T^*

1. Sea w un vector cualquiera fijo de V y definimos un funcional sobre V

$$f:V\longrightarrow IK$$
$$u\longmapsto f(u)=\langle Tu,w\rangle$$

2. Por el Teorema 6, existe un único $w'\in V$, tal que $f(u)=\langle u,w'\rangle$

3. Entonces, por (1) y (2), tendremos: $\langle Tu,w\rangle=\langle u,w'\rangle$, $\forall\, u\in V$

4. Ahora, definimos el operador $T^*:V\longrightarrow V$

$$w\longmapsto w'=T_w^*$$

5. Sustituir en (3): $\langle Tu,w\rangle=\langle u,T_w^*\rangle$

b) Probemos la linealidad de T^*.

Sean w, v en V y sea α un escalar. Entonces para cualquier $u\in V$ y aplicando la igualdad obtenida en (5), tenemos:

$$\langle u, T^*(\alpha w+v)\rangle = \langle Tu, \alpha w+v\rangle$$
$$= \langle Tu, \alpha w\rangle + \langle Tu, v\rangle$$
$$= \bar{\alpha}\langle Tu, w\rangle + \langle Tu, v\rangle$$
$$= \bar{\alpha}\langle u, T_w^*\rangle + \langle u, T_v^*\rangle$$
$$= \langle u, \alpha T_w^*\rangle + \langle u, T_v^*\rangle$$
$$= \langle u, \alpha T_w^* + T_v^*\rangle .$$

Así, queda probado que: $T^*(\alpha w+v) = \alpha T_w^* + T_v^*$, por lo tanto T^* es lineal.

c) Probemos la unicidad de T^*.

Para cualquier vector $w \in V$, el vector T_w^* está unívocamente determinado como el vector w' tal que $\langle Tu, w\rangle = \langle u, w'\rangle$, $\forall\, u \in V$.

Suponer que existe otro operador $T^{\#}$ con la propiedad $\langle Tu, w\rangle = \langle u, T_w^{\#}\rangle$, entonces

La igualdad $\quad \langle u, T_v^{\#}\rangle = \langle u, T_w^*\rangle$,

implica $\quad \langle u, T_w^{\#}\rangle - \langle u, T_w^*\rangle = 0$

$$\langle u, T_w^{\#} - T_w^*\rangle = 0 \ , \ \forall\, u \in V$$

$$\Rightarrow \quad T_w^{\#} - T_v^* = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_w^{\#} = T_w^* \ , \quad \forall\, w \in V .$$

TEOREMA 8. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base (ordenada) ortonormal de V. Sea T un operador lineal sobre V y sea A la matriz de T en la base ordenada $\mathcal{B}$. Entonces $A_{kj} = \langle Tu_j, u_k\rangle$

Demostración:

Hipótesis
- h_1. V e.v.p.i. , $\dim V < \infty$
- h_2. $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V
- h_3. $T : V \longrightarrow V$ es operador lineal.
- h_4. $A = [T]_{\mathcal{B}}$

Tesis $\quad A_{kj} = \langle Tu_j, u_k\rangle$

└── Elementos de la matriz A.

1. Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, entonces cualquier vector $u \in V$ es: $u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k\rangle u_k$

2. La imagen de cada vector u_j mediante T, que se denota por $T(u_j)$ es combinación lineal de los vectores u_k , entonces la matriz A está definida por: $Tu_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\, u_k$.

3. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto ortonormal entonces el conjunto $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ también es un conjunto ortonormal y es base ortonormal de V, entonces cada vector Tu_j es: $Tu_j = \sum_{k=1}^{n} \langle Tu_j, u_k\rangle u_k$

4. Comparando las relaciones obtenidas en 2. y 3. se obtiene: $A_{kj} = \langle Tu_j, u_k\rangle$ que son los elementos de la matriz A.

COROLARIO 8.1 Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita y sea T un operador lineal sobre V. En cualquier base ortogonal de V la matriz de T^* es la conjugada de la transpuesta de la matriz de T.

Demostración.

Hipótesis
- h_1. V e.v.p.i. , $\dim V < \infty$
- h_2. $T : V \longrightarrow V$
- h_3. $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de V

Tesis: $\quad B_{kj} = \overline{A}_{jk}$

Veamos:

1. Sea $\quad A = [T]_{\mathcal{B}} \quad$ y $\quad B = [T^*]_{\mathcal{B}}$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \cdots\cdots A_{1n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ A_{n1} \cdots\cdots A_{nn} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} B_{11} \cdots\cdots B_{1n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ B_{n1} \cdots\cdots B_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz de T en la base $\mathcal{B}$ $\qquad$ matriz de T^* en la base $\mathcal{B}$

2. Denotemos por A_{kj} cada elemento de A y por B_{kj} cada elemento de B.

3. Por el Teorema 8. se tiene que: $A_{kj} = \langle Tu_j, u_k\rangle$

$$B_{kj} = \langle T^*u_j, u_k\rangle$$

4. Por definición de T^* se tiene que:

$$B_{kj} = \langle T^*u_j, u_k\rangle = \overline{\langle u_k, T^*u_j\rangle} = \overline{\langle Tu_k, u_j\rangle} = \overline{A}_{jk}$$

Definición.- Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre un espacio con producto interno V. Entonces se dice que T, tiene un ***adjunto*** sobre V si existe un operador lineal $T^*: V \longrightarrow V$ sobre V tal que: $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$ para todo u y v en V.

Comentario:

1. El adjunto de T depende de T y del producto interno.
2. Dada una base ordenada arbitraria $\mathcal{B}$ en V, la relación entre $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T^*]_{\mathcal{B}}$ es más complicada que la dada en el corolario 8.1.

Ejemplo 1

Sea $V = \mathbb{C}^{n\times 1} = \left\{ X = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} : z_k \in \mathbb{C} \right\}$ el espacio de las matrices complejas $n \times 1$.

Sobre V se define el producto interno $\langle X, Y\rangle = X^*Y$ .... (1)

Sea el operador $T: V \longrightarrow V$, donde A es una matriz $n\times n$ con elementos complejos

$$X \longmapsto AX$$

El adjunto de T es $T^*: V \longrightarrow V$

$$X \longmapsto A^*X$$

¿Cómo probar que T^* es adjunto de T?

Si se cumple que: $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^*Y\rangle$, afirmamos que T^* es la adjunta T.

Veamos: $\langle AX, Y\rangle = (AX)^*Y = (X^*A^*)Y = X^*(A^*Y) = \langle X, A^*Y\rangle$

Hemos aplicado las propiedades: $(AX)^* = X^*A^*$ .... (adjunta de un producto)

$(X^*A^*)Y = X^*(A^*Y)$ .... (propiedad asociativa)

- Como vemos, el adjunto de T depende de T y del producto interno definido en (1).

Ejemplo 2

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{C}^{n\times n}$

Sobre V definimos el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^*A)$ .... (1)

Elegimos una matriz $M_{n\times n}$ sobre $\mathbb{C}$ y definimos el operador $L_M: V \longrightarrow V$

$$A \longmapsto MA = L_M(A)$$

Probar que: $(L_M)^* = L_{M^*}$

Demostración:

Aplicando la definición del producto interno dado en (1), hallemos $\langle L_M(A), B\rangle$, para probar que $\langle L_M(A), B\rangle = \langle A, L_{M^*}(B)\rangle$, así $(L_M)^* = L_{M^*}$.

Veamos:

$$\begin{aligned}
\langle L_M(A), B\rangle &= tr(B^*L_M(A)) &&, \text{ pero } L_M(A) = MA \\
&= tr(B^*(MA)) &&, \text{ aplicar: } tr(B^*(MA)) = tr((MA)B^*) \\
&= tr((MA)B^*) && \\
&= tr(M(AB^*)) &&, \ (MA)B^* = M(AB^*) \\
&= tr((AB^*)M) &&, \ tr(M(AB^*)) = tr((AB^*)M) \\
&= tr(A(B^*M)) &&, \ (AB^*)M = A(B^*M) \\
&= tr(A(M^*B)^*) &&, \ (M^*B)^* = B^*M \\
&= \langle A, L_{M^*}(B)\rangle &&, \ \langle A, L_{M^*}(B)\rangle = tr((L_{M^*}(B))^*A) \\
& && \qquad = tr(A(L_{M^*}(B)^*) \\
& && \qquad = tr(A(M^*B)^*)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Sea V el espacio de polinomios sobre $\mathbb{C}$.

Sobre V definimos el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Si f es un polinomio $f=\sum a_k x^k$, se hace

$$\bar{f}=\sum \bar{a}_k x^k$$

En general: $\bar{f}(t)=\overline{f(t)}$, $t\in \mathbb{R}$.

Manteniendo fijo el polinomio f, definimos el operador lineal M_f del siguiente modo:

$$M_f : V \longrightarrow V$$
$$g \longrightarrow fg = M_f(g)$$

Probar que $\langle M_f(g),h\rangle = \langle g, M_{\bar f}(h)\rangle$

Siendo así, la adjunta de M_f es $M_{\bar f}$, esto es $(M_f)^* = M_{\bar f}$

Demostración:

Partir de $\langle M_f(g),h\rangle$ y aplicar las definiciones $M_f(g)=fg$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

$$\langle M_f(g),h\rangle = \langle fg,h\rangle \quad , \quad \text{pues } M_f(g)=fg$$

$$= \int_0^1 (fg)(t)\overline{h(t)}\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}\,dt \quad , \quad f(t)g(t)=g(t)f(t)$$

$$= \int_0^1 g(t)f(t)\overline{h(t)}\,dt \quad , \quad \overline{\overline{f(t)}h(t)} = f(t)\overline{h(t)}$$

$$= \int_0^1 g(t)\left[\overline{\overline{f(t)}h(t)}\right]dt$$

$$= \langle g, \bar f h\rangle \quad , \quad M_{\bar f}(h)=\bar f h$$

$$= \langle g, M_{\bar f}(h)\rangle \qquad \langle g, M_{\bar f}(h)\rangle = \langle g, \bar f h\rangle$$

Así, queda probado que $(M_f)^* = M_{\bar f}$

TEOREMA 9. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita. Si T y U son operadores lineales sobre V y α es un escalar.

1) $(T+U)^* = T^*+U^*$ la adjunta de la suma $T+U$ es igual a la suma de adjuntas.

2) $(\alpha T)^* = \bar\alpha T^*$ la adjunta de αT es igual al producto de $\bar\alpha$ por la adjunta de T.

3) $(TU)^* = U^*T^*$ La adjunta del producto TU es igual al producto de adjuntas conmutadas U^*T^*

4) $(T^*)^* = T$ La adjunta de la adjunta de T es igual a T

Demostración de (1).-

Aplicar el Teorema 7:

al operador T está asociado T^*, tal que $\langle Tv,w\rangle = \langle v,T_w^*\rangle$, $\forall\, v,w\in V$

al operador U está asociado U^*, tal que $\langle Uv,w\rangle = \langle v,U_w^*\rangle$, $\forall\, v,w\in V$

Si se prueba que $\langle (T+U)v,w\rangle = \langle v,(T^*+U^*)w\rangle$ afirmamos que $(T+U)^* = T^*+U^*$

Veamos:

Sean v y w vectores de V. Entonces. $\langle (T+U)v,w\rangle = \langle Tv+Uv,w\rangle$

$$= \langle Tv,w\rangle + \langle Uv,w\rangle$$
$$= \langle v,T_w^*\rangle + \langle v,U_w^*\rangle$$
$$= \langle v,T_w^* + U_w^*\rangle$$
$$= \langle v,(T^*+U^*)w\rangle$$

De la unicidad del adjunto se deduce que: $(T+U)^* = T^*+U^*$.

Demostración de (2).-

Se debe probar que: $\langle (\alpha T)v,w\rangle = \langle v,\bar\alpha T_w^*\rangle$

Veamos: $\langle (\alpha T)v,w\rangle = \langle \alpha Tv,w\rangle$

$$= \alpha\langle Tv,w\rangle$$
$$= \alpha\langle v,T_w^*\rangle$$
$$= \langle v,\bar\alpha T_w^*\rangle$$

De la unicidad de adjunto se tiene que: $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$

Demostración de (3).-

Se debe probar: $\langle (TU)v, w\rangle = \langle v, (U^*T^*)w)\rangle$

Veamos: $\langle (TU)v, w\rangle = \langle T(Uv), w\rangle$ por composición de operadores

$= \langle Uv, T_w^*\rangle$

$= \langle v, U^*(T_w^*)\rangle$

$= \langle v, (U^*T^*)w\rangle$

Por la unicidad del adjunto, se tiene: $(TU)^* = U^*T^*$

Demostración de (4).-

Si se prueba que: $\langle T_v^*, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ afirmamos que $(T^*)^* = T$.

Partir de $\langle T_v^*, w\rangle$ y aplicar la propiedad $\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}$

Veamos:

$\langle T_v^*, w\rangle = \overline{\langle w, T_v^*\rangle}$ .... (1)

Pero: $\langle w, T_v^*\rangle = \langle Tw, v\rangle$ .... (2)

(2) en (1): $\langle T_v^*, w\rangle = \overline{\langle Tw, v\rangle}$

$= \langle v, Tw\rangle$

Por la unicidad de adjunto, se tiene que: $(T^*)^* = T$

PROBLEMAS

01 Sea V el espacio $\mathbb{C}^2$ dotado del producto interno canónico. Sea T el operador lineal definido por $T\varepsilon_1 = (1,2)$, $T\varepsilon_2 = (i,-1)$. Si $\alpha = (x_1, x_2)$, hallar T_α^*.

Solución:

Según el problema se tiene: $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$\varepsilon_1 \longmapsto (1,2)$

$\varepsilon_2 \longmapsto (i,-1)$

Si $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, entonces $(x_1, x_2) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2$

Aplicar T

$$T(x_1,x_2) = x_1T\varepsilon_1 + x_2T\varepsilon_2$$
$$= x_1(1,2) + x_2(i,-1)$$
$$= (x_1 + ix_2, 2x_1 - x_2)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es la matriz de T en la base B.

y $[T]_B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$, es la matriz de la adjunta de T en la base B.

Luego $T^* : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ está definida por $T^*(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= (x_1 + 2x_2, -ix_1 - x_2)$$

02 Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ definido por $T\varepsilon_1 = (1+i, 2)$, $T\varepsilon_2 = (i,i)$. Usando el producto interno canónico, hallar la matriz de T^* en la base ordenada canónica. ¿Conmuta T con T^*?

Solución:

Similar al problema anterior:

$$(x_1, x_2) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2$$

Aplicar T, $T(x_1,x_2) = x_1T\varepsilon_1 + x_2T\varepsilon_2$

$$= x_1(1+i, 2) + x_2(i,i)$$
$$= \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de T en la base $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es $A = [T]_B = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix}$

Necesitamos la matriz $A^* = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{bmatrix}$ ⟵ es la transpuesta de la conjugada de A.

Luego, $T^*(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- Si se cumple que $AA^* = A^* A$, afirmamos que T conmuta con T^*

Veamos:

$$AA^* = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3+2i \\ 3-2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^* A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1+3i \\ 1-3i & 2 \end{bmatrix}$$

Conclusión: T y T^* no conmutan.

03 Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V cuya matriz en la base ordenada canónica está definida por:

$$A_{jk} = i^{j+k} \qquad , \qquad (i^2 = -1)$$

Hallar una base para el espacio nulo de T^*.

Solución:

Se tiene el operador $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto AX = T(X)$$

donde $X = (x, y, z)^t$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix} = [T]_B$

La matriz de $[T^*]_B$ es $\bar{A}^t = \begin{bmatrix} -1 & i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \end{bmatrix}$

└── la transpuesta de la conjugada de A.

Luego $T^* : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ es un operador definido por:

$$T^*(x, y, z) = (-x + i\,y + z, i\,x + y - i\,z, x - i\,y - z)$$

a) El espacio nulo de T^* es $Nu(T^*) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : T^*(x, y, z) = (0,0,0)\}$

Así obtenemos:

$$\begin{cases} -x + iy + z = 0 & (\text{por } i) \\ ix + y - iz = 0 & \leftarrow + \quad (\text{por } i) \\ x - iy - z = 0 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + iy + z = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

de la 1ra. ecuación se obtiene: $x = iy + z$

Así obtenemos: $(x, y, z) = (iy + z, y, z)$

$$= y(i,1,0) + z(1,0,1)$$

Una base de T^* es $\{(i,1,0), (1,0,1)\}$

RELACIÓN ENTRE T y T^*

Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal, entonces la relación entre T y T^*, es:	Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal, entonces la relación entre T y T^*, es:
T es hermitiano , si $T^* = T$	T es simétrico si $T^* = T$ $(A^t = A)$
T es antihermitiano , si $T^* = -T$	T es antisimétrico si $T^* = -T$ $(A^t = -A)$
T es normal , si $TT^* = T^*T$	T es normal si $TT^* = T^*T$ $(AA^t = A^t A)$
T es unitario , si $TT^* = I$	T es ortogonal si $TT^* = I$ $(AA^t = I)$
$A^* = \bar{A}^t$: Transpuesta de la conjugada de A	$A^* = A^t$: Transpuesta de A.

04 Sea λ un valor propio de un operador lineal T en V.

Demostrar que:

a) Si $T^* = T^{-1}$, entonces $|\lambda| = 1$.
b) Si $T^* = T$, entonces λ es real.
c) Si $T^* = -T$, entonces λ es imaginario puro.
d) Si $T = S^*S$ con S no singular (es decir, si T es definido positivo), entonces λ es real y positivo.

Demostración de a).-

Recordar: 1) λ es valor propio de T, si existe un vector $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$

2) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda\bar{\lambda} = \|\lambda\|^2$

3) $T^* = T^{-1}$ es equivalente a $TT^* = I \iff T^*T = I$

Bastará demostrar que $\lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle = \langle v,v\rangle$.

Veamos:

$$\lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle = \lambda\langle \lambda v,v\rangle = \langle \lambda v,\lambda v\rangle = \langle T(v),T(v)\rangle$$
$$= \langle v,T^*(T(v))\rangle \quad \text{unicidad de } T^*$$
$$= \langle v,T^*T(v)\rangle$$
$$= \langle v,I(v)\rangle$$
$$= \langle v,v\rangle$$

Lo cual implica que: $\lambda\bar{\lambda} = 1 \iff \|\lambda\| = 1$, ya que $\langle v,v\rangle \neq 0$, porque $v \neq 0$.

Demostración de b).-

Bastará demostrar que $\lambda = \bar{\lambda}$ (esta igualdad es verdadera, sólo cuando $\lambda \in \mathbb{R}$)

Partimos de $\lambda\langle v,v\rangle$: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle$, pero $\lambda v = T(v)$

$$= \langle T(v),v\rangle$$
$$= \langle v,T^*(v)\rangle \quad , \text{ pero } T^* = T$$
$$= \langle v,T(v)\rangle \quad , \text{ pero } T(v) = \lambda v$$
$$= \langle v,\lambda v\rangle$$
$$= \bar{\lambda}\langle v,v\rangle$$

Lo cual prueba que $\lambda = \bar{\lambda}$, puesto que $\langle v,v\rangle \neq 0$.

Demostración de c).-

Bastará demostrar que $\lambda = -\bar{\lambda}$ (λ es imaginario, si $\lambda = -\bar{\lambda}$ ó $\bar{\lambda} = -\lambda$)

Veamos: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle = \langle v,T^*(v)\rangle$, pero $T^* = -T$

$$= \langle v,-T(v)\rangle \quad , \text{ pero } T(v) = \lambda v$$
$$= \langle v,-\lambda v\rangle$$
$$= -\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$$

Esta igualdad implica que: $\lambda = -\bar{\lambda}$, ya que $\langle v,v\rangle \neq 0$

Demostración de d).-

Bastará probar que: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle$, puesto que $\langle S(v),S(v)\rangle > 0$

Veamos: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle$, pero $T = S^*S$

$$= \langle S^*S(v),v\rangle$$
$$= \langle S(v),S(v)\rangle$$

como $\langle v,v\rangle$ y $\langle S(v),S(v)\rangle$ son positivos; por lo tanto λ es positivo.

05 Sea $End(V) = \{T / T : V \longrightarrow V\}$
endomorfismo

a) Si $T \in End(V)$, demostrar que $Nu(T^*) = (T(V))^{\perp}$

$Nu(T^*)$: núcleo de T^* (adjunta de T)

$(T(v))^{\perp}$: complemento ortogonal de $T(V)$, que es la imagen de T.

b) $Nu(T) = (T^*(V))^{\perp}$

Demostración de a).-

Debo probar que: $\forall\, u \in (T(V))^{\perp}$ implica que $T^*(u) = 0$

Veamos:

Si $u \in (T(V))^{\perp}$ entonces $\langle u,T(v)\rangle = 0$, $\forall\, T(v) \in T(V)$

Pero $\langle u,T(v)\rangle = \langle T^*(u),v\rangle$, entonces $\langle T^*(u),v\rangle = 0$, $\forall\, v \in V$

Este producto interno es cero sólo cuando $T^*(u) = 0$

Esta igualdad implica que $u \in Nu(T^*)$

Hemos demostrado que $(T(V))^* \subset Nu(T^*)$. Pero también se cumple el recíproco, lo cual implica que se cumple la igualdad.

Demostración de b).-

Probemos que: $(T^*(V))^{\perp} \subset Nu(T)$

Por demostrar que $\forall\, u \in (T^*(V))^{\perp}$ implica que $u \in Nu(T)$

Veamos:

Si $u \in (T^*(V))^{\perp} \Rightarrow \langle u, T^*(v)\rangle = 0$, $\forall\, T^*(v) \in T^*(V)$

Pero $\langle u, T^*(v)\rangle = \langle T(u), v\rangle$

$\Rightarrow \langle T(u), v\rangle = 0$

Este producto interno es igual a cero, sólo cuando $T(u) = 0$. Lo cual prueba que $u \in Nu(T)$.

06 Probar que: a) $I^* = I$ y b) $0^* = 0$

a) Por definición de aplicación identidad: $I(u) = u$, $I(v) = v$.

Entonces $\forall\, u, v \in V$ se tiene: $\langle I(u), v\rangle = \langle u, v\rangle = \langle u, I(v)\rangle$, lo cual implica que $I^* = I$

b) Por definición de aplicación nula se tiene $\mathbf{0}(u) = 0$ y $\mathbf{0}(v) = 0$

Entonces $\forall\, u, v \in V$ se tiene:

$\langle \mathbf{0}(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0 = \langle u, 0\rangle = \langle u, \mathbf{0}(v)\rangle$, lo cual implica que $\mathbf{0}^* = \mathbf{0}$

07 Sean V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Si T es inversible, demostrar que T^* es inversible y que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Demostración.-

Bastará probar que $I = (T^{-1})^* T^*$

Veamos:

Aplicar las propiedades: $I = I^*$, $TT^{-1} = I$, $(TU)^* = U^* T^*$

Así obtenemos: $U = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*$

Si $I = (T^{-1})^* T^*$ entonces $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

7.6 OPERADORES AUTOADJUNTOS

Definición.- Un operador lineal $T: V \longrightarrow V$, es un $I\!K$-espacio vectorial provisto de producto interno, se llama ***autoadjunto*** si $T = T^*$, o sea cuando $\langle T\mu, v\rangle = \langle \mu, Tv\rangle$ para cualquier $\mu, v \in V$.

Si A es la matriz asociada al operador T, entonces $\begin{cases} \text{a) } A^* = \bar{A}^t \text{ , si } I\!K = \mathbb{C} \\ \text{b) } A^* = A^t \text{ , si } I\!K = I\!R \end{cases}$

PROPIEDADES:

Si $T, U: V \longrightarrow V$ son operadores autoadjuntos y $\alpha \in I\!R$, entonces:

P_1 : $T + U$ es autoadjunta

P_2 : αT es autoadjunta

P_3 : TU es autoadjunta si, y sólo si, T y U conmutan.

Demostración de P_1

1) $(T+U)^* = T^* + U^*$, propiedad de adjunta

2) Pero: $T^* = T$ y $U^* = U$, porque T y U son autoadjuntas.

3) (2) en (1) : $(T+U)^* = T + U$ ∎

La demostración de P_2 y P_3 quedan como ejercicio.

♦ Resultados importantes que se obtienen con operadores autoadjuntos son: el Teorema espectral para operadores autoadjuntos y el Teorema de los valores singulares.

EJEMPLO 01. Cuando se trabaja con operadores autoadjuntos resulta sencillo trabajar con sus respectivas matrices asociadas.

Por ejemplo:

a) Si $I\!K = I\!R$, sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ una matriz sobre $I\!R$.

Definimos el operador $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ como $T(X) = AX$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Se cumple que $A = A^t$, entonces T es autoadjunta.

b) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, sea $A=\begin{bmatrix} 3 & 2i \\ -2i & -4 \end{bmatrix}$ una matriz sobre $\mathbb{C}$.

Definimos el operador $T:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ como $T(X)=AX$, donde $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Se cumple que: $A=\bar{A}^t$. Entonces T es autoadjunto.

TEOREMA 1. $T:V\longrightarrow V$ es autoadjunto si, y solamente si, su matriz $A=[a_{ij}]$, respecto de cualquier base ortonormal $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una matriz simétrica.

Demostración:

1. Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, entonces cada vector Tu_j se puede expresar como combinación lineal de los vectores $u_1,\ldots,u_n$.

   Esto es $Tu_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i$. Pero $a_{ij}=\langle u_i,Tu_j\rangle$

   Entonces $Tu_j=\sum_{i=1}^{n}\langle u_i,Tu_j\rangle u_i$

2. La matriz A es simétrica s.s.s. $a_{ij}=a_{ji}$, es decir, cuando

   $$\langle u_i,Tu_j\rangle=\langle Tu_i,u_j\rangle \ , \ i,j=1,\ldots,n$$
   (2*)

3. Porque T es lineal y el producto interno es bilineal, la igualdad (2*). equivale a decir que $\langle u,Tv\rangle=\langle Tu,v\rangle$, $\forall\, u,v\in V$, o sea que T es autuadjunto.

TEOREMA 2. Sea $T:V\longrightarrow V$ un operador autoadjunto. Si el subespacio $W\subset V$ es invariante por T, su complemento ortogonal $W^\perp$ también es invariante.

Demostración.

HIPÓTESIS
- h_1. $\langle Tu,v\rangle=\langle u,Tv\rangle$, $u,v\in V$ (porque T es autoadjunto)
- h_2. $T(W)\subset W$, porque W es invariante por T. Esto es, $Tu\in W$ cuando $u\in W$.

TESIS: $W^\perp$ es invariante por T.

Se debe probar que: $T(W^\perp)\subset W^\perp$

Lo que es equivalente probar que: $Tv\in W^\perp$, cuando $v\in W^\perp$.

Veamos:

- Elegimos $u\in W$, $v\in W^\perp$
- Por la hipótesis h_2: afirmamos que $Tu\in W$, con $u\in W$.
- Si $Tu\in W$ y $v\in W^\perp$ entonces $\langle Tu,v\rangle=0$ .... (1)
- Por la hipótesis h_1: $\langle Tu,v\rangle=\langle u,Tv\rangle$ .... (2)
- Por (1) y (2) obtenemos: $\langle u,Tv\rangle=0$
- La igualdad $\langle u,Tv\rangle=0$, con $u\in W$, implica que $Tv\in W^\perp$.
- Por tanto $W^\perp$ es invariante por T.

TEOREMA 3. Si el subespacio $W\subset V$ es invariante por el operador lineal $T:V\longrightarrow V$ entonces su complemento ortogonal $W^\perp$ es invariante por el operador adjunto $T^*:V\longrightarrow V$.

Demostración

HIPÓTESIS
- h_1 : $W\subset V$, W es subespacio de V
- h_2 : $T:V\longrightarrow V$ es un operador lineal.
- h_3 : $T(W)\subset W$, porque W es invariante por T.

TESIS: $T^*(W^\perp)\subset W^\perp$ .... (bastará demostrar que: $T_v^*\in W^\perp$)

Veamos:

- Elegir: $u\in W$ y $v\in W^\perp$
- Por la hipótesis h_3, afirmamos que el vector $Tu\in W$, con $u\in W$.
- Si $Tu\in W$ y $v\in W^\perp$, entonces $\langle Tu,v\rangle=0$ .... (1)
- Pero T está asociado con T^*, tal que $\langle Tu,v\rangle=\langle u,T_v^*\rangle$ .... (2)
- Por (1) y (2): $\langle u,T_v^*\rangle=0$, con $u\in W$, lo cual implica que $T_v^*\in W^\perp$. Esto prueba que $W^\perp$ es invariante por T^*.

TEOREMA 4. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ son autovalores, diferentes dos a dos, del operador autoadjunto $T:V\longrightarrow V$, entonces los autovectores correspondientes $v_1,\dots,v_m$ son ortogonales dos a dos.

Demostración:

$$\text{HIPÓTESIS}\begin{cases} h_1: & \lambda_i\neq\lambda_j \ , \ i\neq j \ , \ i,j=1,\dots,m \\ h_2: & \langle Tv_i,v_j\rangle=\langle v_i,Tv_j\rangle \text{, porque } T \text{ es autoadjunto} \\ h_3: & Tv_i=\lambda_i v_i \text{, si } v_i \text{ es autovector.}\end{cases}$$

TESIS: Por demostrar que $\langle v_i,v_j\rangle=0$, $\forall\, i\neq j$.

Veamos:

- Por h_1, partimos de $(\lambda_i-\lambda_j)\langle v_i,v_j\rangle$
- Desarrollar el producto interno: $(\lambda_i-\lambda_j)\langle v_i,v_j\rangle=\lambda_i\langle v_i,v_j\rangle-\lambda_j\langle v_i,v_j\rangle$

$$=\langle\lambda_i v_i,v_j\rangle-\langle v_i,\lambda_j v_j\rangle$$

- Por h_3 : $=\langle Tv_i,v_j\rangle-\langle v_i,Tv_j\rangle$
- Por h_2 : $=\underbrace{\langle Tv_j,v_j\rangle-\langle Tv_i,v_j\rangle}_{}$ $=0$
- Por h_1 : Si $\lambda_i-\lambda_j\neq 0$, entonces $\langle v_i,v_j\rangle=0$

EJEMPLO 01. Dado el operador $T:I\!R^2\longrightarrow I\!R^2$ definido por:

$$T(x_1,x_2)=(x_1+2x_1\,,2x_1+x_2)\,.$$

a) ¿Es T un operador autoadjunto?

b) Los vectores propios de T ¿con ortogonales?

Solución:

a) La matriz de T en la base ordenada canónica es $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$. Como A es una matriz simétrica, afirmamos que T es un operador autoadjunto.

b) El polinomio característico de A es $P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$.

Los valores propios son: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$.

El vector propio de $\lambda_1=-1$ es $u=(1,-1)$

El vector propio de $\lambda_2=3$ es $v=(1,1)$

Como $\langle u,v\rangle=0$, afirmamos que u y v son ortogonales.

Observaciones:

1. Si se tiene $T(v)=\lambda v$ y $w=\alpha v$ y aplicamos T a la igualdad $w=\alpha v$

   Obtenemos $T(w)=\alpha T(v)=\alpha(\lambda v)=\lambda(\alpha v)=\lambda w$.

   Entonces $T(w)=\lambda w$. Este resultado nos indica que los vectores $v_1,\dots,v_m$ del Teorema 4 pueden, convenientemente, tomarse como vectores unitarios.

   Del ejemplo 1, podemos elegir como base ortonormal de $I\!R^2$ el conjunto:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$$

   Este proceso dará lugar al teorema espectral, que afirma: si $T:V\longrightarrow V$ es un operador autoadjunto en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, entonces existe una base ortonormal en V, respecto a la cual las matriz A es una matriz diagonal.

2. La proyección ortogonal $P:I\!R^5\longrightarrow I\!R^5$ sobre el subespacio:

$$W=\{(x,y,z,\mu,w)\in I\!R^5\,/\,\mu=0\,,\,w=0\}$$

   es un operador autoadjunto. La matriz de la proyección $P(x,y,z,\mu,w)=(x,y,z,0,0)$ en la base canónica $B=\{(1,0,0,0,0),\dots,(0,0,0,0,1)\}$ es.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

   $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=0$, $\lambda_5=0$ son los autovalores.

TEOREMA 5. Sea $T:V\longrightarrow V$, un operador autoadjunto en un espacio vectorial de dimensión 2, provisto de un producto interno. Existe una base ortonormal $\{\mu_1,\mu_2\}\subset V$ formada por autovectores de T.

Demostración:

$$\text{HIPÓTESIS}\begin{cases} h_1: & T \text{ es autoadjunto con producto interno.}\\ h_2: & \dim V=2\end{cases}$$

TESIS: Existe una base ortonormal $\{u_1,u_2\}$ donde u_1 y u_2 son autovectores de T.

Veamos:

1. Suponer que $\{u, w\}$ sea una base ortonormal arbitraria.
2. Por h_1 y por el teorema 1, afirmamos que:

$$\begin{matrix} Tu = au + bw \\ Tw = bu + cw \end{matrix} \quad , \quad \text{donde } \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ es simétrica.}$$

3. Los autovalores de una matriz simétrica son números reales que se obtienen del polinomio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

Porque las raíces del polinomio $P(\lambda)$ son números reales, debe ser que el discriminante

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) \geq 0$$

a) Si $\Delta = 0$, entonces $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = 0$

$$a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = 0$$
$$\therefore (a-c)^2 - 4b^2 = 0$$
$$c = a \quad \wedge \quad b = 0$$

En este caso, el polinomio característico de T se reduce a la forma: $P(\lambda) = (\lambda - a)^2$

obteniéndose en (2) $\begin{cases} Tv = av \\ Tw = aw \end{cases}$ y la matriz asociada a T es $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = A = aI$

Luego, la igualdad $A = aI$ implica que todo vector no nulo en V es un autovector.

b) Si $\Delta > 0$, entonces el polinomio $P(\lambda)$ posee dos raíces reales distintas λ_1, λ_2; lo que implica que los operadores $T - \lambda_1 I$ y $T - \lambda_2 I$, no son invertibles. Por lo tanto, existen dos vectores no nulos (que podemos suponer unitarios) $u_1, u_2 \in V$ tales que:

$$(T - \lambda_1 I)u_1 = 0 \quad \text{y} \quad (T - \lambda_2)u_2 = 0$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$Tu_1 = \lambda_1 u_1 \quad \text{y} \quad Tu_2 = \lambda_2 u_2$$

Por estas igualdades y por el teorema 4, afirmamos que $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de autovectores. ■

PROBLEMA 01 Para todo operador lineal $T : V \longrightarrow V$, en un espacio vectorial de dimensión finita, existen un polinomio mónico irreductible P, de grado 1 o 2, y un vector no nulo $v \in V$, tales que $P(T) \cdot v = 0$.

Demostración:

HIPÓTESIS $\begin{cases} h_1 : & \text{el operador } T : V \longrightarrow V \text{ es lineal} \\ h_2 : & \dim V = n \text{, porque } V \text{ es un e.v. de dimensión finita.} \end{cases}$

TESIS: existe un polinomio P_i de grado 1 o 2, tal que $P_i(T) \cdot v = 0$

Veamos:

1. Por h_1 y h_2 afirmamos que el conjunto de los operadores lineales.
$\mathfrak{L}(V) = \{T : V \longrightarrow V \,/\, T \text{ es una transformación lineal}\}$ tiene $\dim \mathfrak{L}(V) = n^2$.
2. Si a la base de $\mathfrak{L}(V)$ le agregamos el operador identidad I, obtendremos que los n^2+1 operadores $I, T, \ldots, T^{n^2}$ son linealmente dependientes. Por consiguiente, existen números reales $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$ no todos nulos, tales que:
$\alpha_0 I + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0$ .... (2*)
3. De (2*) deducimos que $q(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_{n^2} T^{n^2}$ es el operador $q(T) : V \longrightarrow V$ y $q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n^2} x^{n^2}$ es un polinomio en x, tal que:
$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n^2} x^{n^2} = 0$ .... (3*)
4. Suponer en (3*) que α_m es el coeficiente no nulo de mayor índice. Dividiendo entre α_m obtenemos el polinomio mónico:
$P(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1} + x^m$, tal que $P(T) = 0$
5. Sabemos que existe una factorización $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \ldots P_k(x)$, donde cada P_i es un polinomio mónico irreducible de grado 1 o 2.
6. En términos de operadores lineales y por (2*), tenemos que:
$P_1(T) \cdot P_2(T) \ldots P_k(T) = 0$ .... (6*)
7. De 6* deducimos que, por lo menos uno de los operadores $P_i(T)$ no es inversible. Así, existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $P_i(T) \cdot v = 0$.

COROLARIO 5.1. Todo operador autodjunto $T:V \longrightarrow V$, en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, tiene un autovector.

Demostración:

1. Por el problema 1, existe un subespacio $W \subset V$, de dimensión 1 o 2, invariante por *T*.
2. Si $\dim W = 1$, todo vector nulo $v \in W$ es autovector de *T*.
3. Si $\dim W = 2$, aplicando el teorema 5 a la restricción $T:W \longrightarrow V$, de *T* al subespacio invariante *W*, obtenemos un autovector $v \in W$.

TEOREMA 6. (*Teorema espectral*)

Para todo operador autoadjunto $T:V \longrightarrow V$, en un espacio vectorial de dimensión finita provisto de un producto interno, existe una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_n\} \subset V$ formado por autovectores de *T*.

Demostración:

HIPÓTESIS
- h_1 : *V* es un e.v. con producto interno.
- h_2 : $\dim V = n$, porque *V* tienen dimensión finita.
- h_3 : $T:V \longrightarrow V$ es un operador autoadjunto. Esto es $\langle Tu,v\rangle = \langle u,Tv\rangle$, $\forall\, u,v \in V$

TESIS: Existe una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_n\}$ formado por autovectores de *T*.

La demostración es por inducción sobre la $\dim V = n$ .... (h_2)

Veamos:

Debemos probar que la tesis es verdadera para $n=1$ y suponiendo que es verdadero para $n-1$; implica que es verdadero para *n*.

1. Si $n=1$, es evidente que existe un único vector $v \neq 0$, que la podemos convertir en vector unitario $u = \frac{v}{|v|}$, tal que, $B = \{u\}$ es una base ortonormal de *V* y *u* es autovector de *T*.
2. Para la dimensión $n-1$, suponer que los $n-1$ vectores forman una base ortonormal de *V*, tal que, son los autovectores de *T*. .... (hipótesis inductiva)

Veamos:

3. Por el corolario 5.1 y las hipótesis h_1, h_3; existe un autovector unitario de *T* que lo denotaremos por u_n; tal que $W = gen\{u_n\}$ es un subespacio invariante por *T* de $\dim W = 1$.

4. Según el Teorema 2, el complemento ortogonal $W^{\perp}$ también es invariante por *T*.
5. Como $\dim W^{\perp} = n-1$, la hipótesis inductiva, planteada en el paso 2, nos asegura la existencia de una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_{n-1}\} \subset W^{\perp}$ formada por los autovectores de la restricción $T:W^{\perp} \longrightarrow W^{\perp}$.
7. Como $V = W \oplus W^{\perp}$, entonces $\{u_1,\ldots,u_{n-1},u_n\} \subset V$ es una base ortonormal, formada por autovectores de *T*.

7.7 CONSECUENCIAS DEL TEOREMA ESPECTRAL

Sea *V* un espacio vectorial sobre $I\!R$ con producto interno de dimensión finita.

Sea $T:V \longrightarrow V$ un operador simétrico $(T = T^*)$

Entonces:

1. *V* posee una base ORTONORMAL formado por los autovectores de *T*. Supongamos que *A* es la matriz asociada a *T* y $U = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ la base ORTONORMAL, entonces $U = [b_1, b_2, \ldots, b_3]$ es la matriz ORTOGONAL que cumple las propiedades.
   a) $U^{-1}AU = D \iff A = UDU^{-1}$, $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
   b) $Ab_i = \lambda_i\, b_i$
2. Todos los valores propios de *T* son reales.
3. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in I\!R$ son los distintos autovalores de *T* y $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, \ldots, S_{\lambda_r}$ son los subespacios característicos de *V*, entonces se cumplen las siguientes propiedades:
   a) $T(S_{\lambda_i}) \subset S_{\lambda_i}$, es decir S_{λ_i} es *T*-invariante.
   b) $S_{\lambda_i} \perp S_{\lambda_j}$, $i \neq j$.
   c) $S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2} \perp \ldots \perp S_{\lambda_r} = V$
   SUMA ORTOGONAL

4. $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i = A$ (descomposición espectral de A.) donde $P_i = U E_i U^{-1}$

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5. $\sum_{i=1}^{r} P_i = I$

6. $P_i P_j = 0 \quad , \quad i \neq j$ (matriz nula)

7. $P_i^2 = P_i = P_i^t \quad , \quad \forall\, i$

8. **Cada matriz P_i cumple las siguientes propiedades.**

   a) $P_i^2 = P_i = P_i^t$ b) $|P_i v| \leq |v| \quad , \quad \forall\, v \in V$

   c) $A P_i = P_i A \quad , \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,n$

9. **CAMBIO DE COORDENADAS:** En $I\!R^n$ toda ecuación ${}^tXAX = c$ con el cambio $X = UY$ se reduce a $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 = c$

EJEMPLO

Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ la **MATRIZ** del operador $T(X) = AX$ en la base canónica.

Se deduce:

I. $P(\lambda) = (\lambda-6)^2 (\lambda-12)$

II. $\begin{cases} \lambda_1 = 6 \text{ de multiplicidad dos} \Rightarrow S_6 = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \\ \lambda_2 = 12 \Rightarrow S_{12} = gen\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\} \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathcal{O} = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\} \\ \mathcal{U} = gen\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}\right\} \\ U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6} \end{bmatrix} \\ \quad\;\; b_1 \quad b_2 \quad b_3 \end{cases}$$

Se tiene:

1. $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base **ortonormal**.

donde $b_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

y $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6} \end{bmatrix}$ es la matriz **ORTOGONAL** $(U^{-1} = U^t)$

que cumple las propiedades:

a) $U^{-1}AU = D = diag(6,6,12)$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{cases} Ab_1 = 6b_1 \\ Ab_2 = 6b_2 \\ Ab_3 = 12b_3 \end{cases}$

2. **Todos los valores propios de T son reales. ($\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 12$ son reales).**

3. **Los subespacios característicos (propios) asociados a cada valor propio son:**

   $S_6 = gen\{b_1, b_2\}$

   $S_{12} = gen\{b_3\}$

   y cumplen las propiedades: a) $T(S_6) \subset S_6 \quad , \quad T(S_{12}) \subset S_{12}$

   b) $S_6 \perp S_{12}$

   c) $S_6 \perp S_{12} = V \quad , V = I\!R^3$

4. $$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 6\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} + 6\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_2} + 12\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3}$$

$$D = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3$$

$$\underbrace{U\,D\,U^{-1}}_{A} = \lambda_1 \underbrace{(U\,E_1\,U^{-1})}_{P_1} + \lambda_2 \underbrace{(U\,E_2\,U^{-1})}_{P_2} + \lambda_3 \underbrace{(U\,E_3\,U^{-1})}_{P_3}$$

$$\boxed{A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3}$$

Donde: $P_1 = U\,E_1\,U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = U\,E_2\,U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$P_3 = U\,E_3\,U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

5. $P_1 + P_2 + P_3 = I$

6. $P_i\,P_j = 0$, $i \neq j$

7. $P_i^2 = P_i = P_i^t$, $\forall\, i = 1,2,3$

8. Cada matriz P_i es isomorfo al operador $T_i(v) = P_i v$ y cumplen las propiedades:

   a) $P_i^2 = P_i = P_i^t$, $\forall\, i$

   b) $|P_i v| \le |v|$, $\forall\, v \in V$, $V = I\!R^3$

   c) $A\,P_i = P_i A$, $\forall\, i = 1,2,3$

9. Cambio de coordenadas: $Y = {}^tU\,X$, ${}^tU$: transpuesta de U.

10. ${}^tY\,DY = 6y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_3^2$

PROBLEMAS

GRUPO 01.

01 Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Solución: $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$

Si $\theta = 2k\pi$, la aplicación es la idéntica y todo vector es un vector propio.

Si $\theta = (2k+1)\pi$, la aplicación es la simetría central y cualquier vector del plano será un vector propio con el valor propio igual a -1.

02 Hallar los valores propios y los vectores propios de la siguiente aplicación (matriz).

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

$\lambda_3 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

Si θ no es múltiplo de 2π , entonces un vector propio es $e_3 = x_3(0,0,1)$.

Si $\theta = 2k\pi$, la aplicación es la idéntica.

Si $\theta = (2k+1)\pi$, la aplicación es la simetría respecto al eje OZ.

Si $\lambda_2 = -1$ o $\lambda_3 = -1$, los vectores propios son $v = \alpha e_1 + \beta e_2$.

03 Sea $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por $T(x,y,z) = (x,y,0)$

i) Hallar la matriz A, asociada a T.

ii) Hallar los valores propios y los vectores propios de A.

Solución:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda^2)$

Si $\lambda = 1$, $v_1 = t(0,0,1)$

Si $\lambda = -1$, $v_2 = (x,y,0)$

04 Dado $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por $T(x,y,z) = (x,y,-z)$

Hallar los valores propios y vectores propios de A (matriz asociada de T)

Solución:

$$P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^3$$

Si $\lambda = -1$, entonces $V_1 = t(1,0,0)$

Si $\lambda = 1$, entonces $V_2 = (x,y,0)$

05 Dado $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por $T(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+4z, -x-y-2z)$

Hallar los valores propios, los autovectores y la dimensión de $E(\lambda)$.

Solución:

AUTOVALOR λ	AUTOVECTORES	dim $E(\lambda)$
1	$t(1,-1,0)$, $t \neq 0$	1
-1	$t(0,1,-1)$, $t \neq 0$	1
3	$t(2,3,-1)$, $t \neq 0$	1

06 Dado $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por: $T(x,y,z) = (2x-y+z, 3y-z, 2x+y+3z)$

Solución:

AUTOVALOR λ	AUTOVALORES	dim $E(\lambda)$
2 , 2	$t(-1,1,1)$, $t \neq 0$	1
4	$t(1,-1,1)$, $t \neq 0$	1

07 Dado: $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ definido por:

$T(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 3x+3y+4z)$

Solución:

AUTOVALOR	AUTOVECTORES	dim $E(\lambda)$
7	$t(1,2,3)$, $t \neq 0$	1
1 , 1	$\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)$	1

08 Las matrices $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ se presentan en la teoría cuántica del Spin electrón y se denomina matrices Spin de Pauli. Comprobar que tienen los mismos autovalores 1 y -1.

Determinar todas las matrices 2×2 con elementos complejos que tengan los dos autovalores 1 y -1.

Solución:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, donde b y c son arbitrarios y a es una de las soluciones de $a^2 = 1 - bc$.

09 Sea $T: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definido por $T(x,y) = (x+ay, bx+y)$, $a>0$, $b>0$.

Solución:

AUTOVALORES	AUTOVECTORES	dim $E(\lambda)$
$1+\sqrt{ab}$	$t(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, $t \neq 0$	1
$1-\sqrt{ab}$	$t(\sqrt{a}, -\sqrt{b})$, $t \neq 0$	1

10 Calcular los autovalores de cada una de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solución: 1 , 1 , -1 , -1

GRUPO 02.

11 Si A y B son matrices $n \times n$, siendo B una matriz diagonal, demostrar (por inducción) que el determinante $f(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ es un polinomio en λ con $f(0) = (-1)^n \det A$, y con el coeficiente de λ^n igual al producto de los elementos diagonales de B.

12 Hallar los números característicos y los vectores propios de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

Solución:

Autovalores	Autovectores
a) $\lambda_1 = ai$	$V_1 = c(1,i)$
$\lambda_2 = -ai$	$V_2 = c(1,-i)$
b) $\lambda_1 = 2$	$V_1 = c_1(1,1,0,0)+c_2(1,0,1,0)+c_3(1,0,0,1)$
$\lambda_2 = -2$	$V_2 = c(1,-1,-1,-1)$
c) $\lambda = 2$	$V = c_1(-2,1,0)+c_2(1,0,1)$
d) $\lambda_1 = 1$	$V_1 = c_1(1,0,1)+c_2(0,1,0)$
$\lambda_2 = -1$	$V_2 = c(1,0,-1)$
e) $\lambda_1 = 0$	$V_1 = t(3,-1,2)$
$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-14}$	$V_{2,3} = t(3\pm 2\sqrt{-14}\,,13, 2\pm 3\sqrt{-14})$
f) $\lambda_1 = 1$	$V_1 = t(1,1,1)$
$\lambda_2 = \varepsilon$	$V_2 = t(3+2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 3+2\varepsilon)$
$\lambda_3 = \varepsilon^2$	$V_3 = t(3+2\varepsilon^2, 2+3\varepsilon^2, 3+3\varepsilon^2)$

donde: $\varepsilon = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

13 Encuentre la ecuación característica de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

14 Encuentre los valores característicos de las matrices del ejercicio 13.

15 Determine bases para los espacios característicos de las matrices del ejercicio 13.

16 Encuentre la ecuación característica de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

17 Encuentre los valores característicos de las matrices en el ejercicio 16.

18 Determine bases para los espacios característicos de las matrices del ejercicio 16.

19 Sea $T: P_2 \longrightarrow P_2$ definido por:

$$T(a_0 + ax_1 + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_1 + 2a_2)x^2$$

a) Encuentre los valores característicos de T.

b) Determine bases para los espacios característicos de T.

20 Sea $T: M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ definido por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$

a) Encuentre los valores característicos de T.

b) Determine bases para los espacios característicos de T.

<u>**Respuestas:**</u>

13 a) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ b) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

c) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$ d) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

e) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ f) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

14 a) $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ b) $\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{2}$, $\lambda = -\sqrt{2}$

c) $\lambda = -8$ d) $\lambda = 2$

e) $\lambda = 2$ f) $\lambda = -4$, $\lambda = 3$

15 a) $\lambda = 1$: base $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$; $\lambda = 2$: base $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$; $\lambda = 3$: base $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

b) $\lambda=1$: base $\left\{\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$; $\lambda=\sqrt{2}$: base $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{7}(15+5\sqrt{2})\\ \frac{1}{7}(-1+2\sqrt{2})\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda=-\sqrt{2}$: base $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{7}(15-5\sqrt{2})\\ \frac{1}{7}(-1-2\sqrt{2})\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

c) $\lambda=-8$: base $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ d) $\lambda=2$: base $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

e) $\lambda=2$: base $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ f) $\lambda=-4$: base $\left\{\begin{bmatrix}-2\\ \frac{8}{3}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$; $\lambda=3$: $\left\{\begin{bmatrix}5\\ -2\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

16 a) $(\lambda-1)^2(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ b) $(\lambda-4)^2(\lambda^2+3)=0$

17 a) $\lambda=1$, $\lambda=-2$, $\lambda=-2$, $\lambda=-1$ b) $\lambda=4$

18 a) $\lambda=1$: base $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\lambda=-2$: base $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\lambda=-1$: base $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda=4$: base $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

19 a) $\lambda=-4$, $\lambda=3$

b) Base para el espacio característico correspondiente a $\lambda=-4$: $-2+\frac{8}{3}x+x^2$

base para el espacio característico correspondiente a $\lambda=3$: $5-2x+x^2$

20 Base para el espacio característico correspondiente a $\lambda=1$: $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$;

base para el espacio característico correspondiente a $\lambda=-2$: $\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$;

base para el espacio característico correspondiente a $\lambda=-1$: $\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}$

PROBLEMA 21 Si existe una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_n\}\subset V$ formada por autovectores del operador $T:V\longrightarrow V$ entonces este operador es autoadjunto.

Demostración:

HIPÓTESIS
- h_1. $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base ortonormal.
- h_2. Los vectores $u_1,\ldots,u_n$ son autovectores de T.

TESIS: Probar que $\langle Tu_i,u_j\rangle=\langle u_i,Tu_j\rangle$; $i,j=1,\ldots,n$

Veamos:

1. Por h_1 : $\langle u_i,u_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & , \text{ si } i\neq j\\ 1 & , \text{ si } i=j\end{cases}$

2. Por h_2 : $Tu_i=\lambda_i u_i$ o $Tu_j=\lambda_j u_j$

3. Partimos de $\langle Tu_i,u_j\rangle$ y aplicar las hipótesis h_1 y h_2.

Así obtendremos:

$$\langle Tu_i,u_j\rangle=\langle\lambda_i u_i,u_j\rangle=\lambda_i\langle u_i,u_j\rangle=\lambda_i\,\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,\ldots,n$$
$$=\lambda_j\,\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,\ldots,n$$
$$=\langle u_i,\lambda_j u_j\rangle$$
$$=\langle u_i,Tu_j\rangle,$$

por consiguiente $\langle Tu,v\rangle=\langle u,Tv\rangle$, para cualquier $u,v\in V$.

7.8 OPERADORES POSITIVOS Y NO NEGATIVOS

Definición.- Diremos que el operador lineal $T:V \longrightarrow V$ es no negativo, y escribimos $T \geq 0$, si T es autoadjunto y $\langle Tv,v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$.

Si $\langle Tv,v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$, diremos que T es un operador positivo y escribiremos $T > 0$.

TEOREMA 7. Un operador autoadjunto $T:V \longrightarrow V$ es no negativo si, y sólo si, todos sus autovalores son números no negativos. T es positivo si, y sólo si, todos sus autovalores son positivos.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si T es autoadjunto y $T \geq 0$, entonces $\lambda \geq 0$.

Partimos de: $\lambda\langle v,v\rangle$ y aplicamos sucesivamente las definiciones $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle$, $\lambda v = Tv$ y la definición anterior: $\langle Tv,v\rangle \geq 0$.

Veamos:

$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle Tv,v\rangle \geq 0$, con $v \neq 0$. Entonces $\lambda\langle v,v\rangle \geq 0$, lo cual implica $\lambda \geq 0$.

($\Leftarrow$) Si $\lambda_i \geq 0$ entonces $T \geq 0$

Bastará demostrar $\langle Tv,v\rangle \geq 0$.

- Sea $\lambda_i \geq 0$ (λ_i son los valores propios de T)
- Si T es autoadjunto, por el teorema espectral, existe una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_n\} \subset V$ formada por autovectores con $Tu_i = \lambda_i u_i$.
- Para cualquier vector $v \in V$, se tiene $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$.
- Ahora: $\langle Tv,v\rangle = \left\langle \sum \alpha_i Tu_i, \sum \alpha_i u_i \right\rangle$

$$= \left\langle \sum \alpha_i \lambda_i u_i, \sum \alpha_i u_i \right\rangle \longleftarrow \text{aplicar la propiedad distributiva del producto interno y la propiedad:}$$

$$= \sum \lambda_i \alpha_i^2 \qquad \langle u_i,u_j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

- Como $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1,\ldots,n$ entonces $\langle Tv,v\rangle \geq 0$
- Por tanto, $T \geq 0$.

De manera similar se demuestra: $T > 0$.

7.9 MATRIZ POSITIVA Y MATRIZ NO NEGATIVA

En esta sección nos referimos a las matrices positivas y a las matrices no negativas. Las definiciones que se van a dar corresponden sólo a las matrices simétricas, porque estas están asociadas a los operadores autoadjuntos.

Para aclarar este tema veamos los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 01. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es positiva. ¿Cómo se prueba que A es positiva?

Hay dos formas.

FORMA 01 Aplicamos la definición: A es positiva, si $\langle AX,X\rangle > 0$, donde $X = (x_1,x_2)^t$.

Veamos: $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

$$\langle AX,X\rangle = \langle (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2),(x_1,x_2)\rangle$$

$$= x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \;, \text{ para todo } x_1, x_2 \in I\!R$$

FORMA 02 A es positiva, si todos sus autovalores son positivas.

Veamos:

- El polinomio característico de A es $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$.
- Las raíces de $P(\lambda)$ son los números reales positivos $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$.

EJEMPLO 02. La matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es no negativa.

FORMA 01 Definición: B es no negativa, si $\langle BX,X\rangle \geq 0$, $X = (x_1,x_2)^t$

Veamos: $BX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

$$\langle BX, X\rangle = \langle (x_1+x_2, x_1+x_2), (x_1, x_2)\rangle$$
$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2.$$
$$= (x_1 + x_2) \geq 0$$

Es cero, cuando $x_1 = -x_2$.

FORMA 02 B es no negativa, si los autovalores de B son no negativas. es decir, alguno de sus autovalores es cero y otros son positivos.

- El polinomio característico de B es $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$
- . Los autovalores de B son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

A continuación, enunciaremos dos consecuencias del teorema 7, expresados en los corolarios 7.1 y 7.2.

COROLARIO 7.1 Sea $T \geq 0$. Si, para algún $v \in V$, $\langle Tv, v\rangle = 0$ entonces $Tv = 0$

HIPÓTESIS $\begin{cases} h_1 : T \geq 0 \\ h_2 : \langle Tv, v\rangle = 0 \end{cases}$

TESIS: $Tv = 0$

- Si $T \geq 0$ elegir $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ loa autovalores no nulos de T y $\lambda_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$.
- Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de V que son los autovectores de T con $Tu_i = \lambda_i v_i$.
- Si $v \in V$, entonces $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$
- Aplicar T: $Tv = \alpha_1 Tu_1 + \ldots + \alpha_k Tu_k$

Para afirmar que $Tv = 0$, se debe probar que $\alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0$, puesto que $v \neq 0$ y $u_i \neq 0$.

- Pero $Tu_i = \lambda_i u_i$, $Tv = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k u_k$
- Al desarrollar el producto interno $\langle Tv, v\rangle$, obtenemos:

$\langle Tv, v\rangle = \lambda_1 \alpha_1^2 + \ldots + \lambda_k \alpha_k^2$ .... (1)

- Por h_2 y por (1) escribimos: $\lambda_1 \alpha_1^2 + \ldots + \lambda_k \alpha_k^2 = 0$ .... (2)
- Como $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_k > 0$, la igualdad (2) implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Por tanto $Tv = 0$.

Observación.- Significado geométrico de la relación $\langle Tv, v\rangle \geq 0$.

a) Si $\langle Tv, v\rangle > 0$, el ángulo entre los vectores Tv y v. es siempre agudo, siempre que $Tv \neq 0$.

b) Si $\langle Tv, v\rangle = 0$, el ángulo entre los vectores Tv y v es recto, $v \neq 0$.

COROLARIO 7.2 Un operador es positivo si, y sólo si, es no negativo e inversible.

Demostración.

$T > 0$ s.s.s $T \geq 0$ y T es inversible.

(⇐) Si $T \geq 0$ y T es inversible, entonces para todo $v \neq 0$ se tiene $Tv \neq 0$; luego, por el corolario 1, $\langle Tv, v\rangle > 0$.

(⇒) Si $T > 0$, se cumple $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ y T es inversible.

Definición.- Un operador $U : V \longrightarrow V$ se llama **RAÍZ CUADRADA** del operador $T : V \longrightarrow V$, si $U^2 = T$.

Definición.- Si λ es un autovalor del operador $T : V \longrightarrow V$, el conjunto $E_\lambda = \{v \in V ; Tv = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial propio de V, invariante por T, llamado autosubespacio.

Si T es autoadjunto y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son sus autovalores distintos, entonces (por el Teorema 4) para $i \neq j$, todo vector de E_{λ_i} es ortogonal a cualquier vector en E_{λ_j}. Además (por el Teorema espectral) todo vector $v \in V$ es: $v = v_1 + \ldots + v_r$, donde $v_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, v_r \in E_{\lambda_r}$.

Por tanto, $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$.

7.10 OPERADORES UNITARIOS Y OPERADORES ORTOGONALES

1. DEFINICIÓN

Sean V y W espacios con producto interno sobre el cuerpo $I\!K$ y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal de V en W.

Se dice que T preserva productos internos si $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$, para todo v, w de V.

Un isomorfismo de V sobre W preserva productos internos.

2. DEFINICIÓN

Un ***operador unitario*** en un espacio producto interno es un ***isomorfismo*** del espacio sobre sí mismo.

TEOREMA 1. Sea $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre un espacio con producto interno V. Entonces T es unitario si, y solo si, el adjunto T^* de T existe y $T\,T^* = T^*\,T = I$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ T unitario ***implica*** $T\,T^* = T^*\,T = I$

Veamos:

1. Si $T: V \to V$ es unitario, entonces T es un isomorfismo.
2. Si T es isomorfismo, entonces T es inversible y por lo tanto existe T^{-1} tal que $w = T\,T^{-1}w$.
3. Partiendo de $\langle Tv, w\rangle$ debo probar que $T^{-1} = T^*$

   Veamos:

   $\langle Tv, w\rangle = \langle Tv, TT^{-1}w\rangle$, $\forall\, v, w \in V$ .... (1)

   Por otro lado, para T existe T^* tal que $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ .... (2)
4. Por (1) y (2): $\langle Tv, TT^{-1}w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$.

   Esta igualdad implica $T^{-1} = T^*$.

$(\Leftarrow)$ $T\,T^* = I$ implica que T es unitario.

Debo probar que $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$.

Veamos:

1. Por hipótesis se tiene que: $T\,T^* = T^*\,T = I$, de lo cual se desprende que $T^{-1} = T^*$.
2. Ahora, probemos que T preserva el producto interno:

   Partimos de $\langle Tv, Tw\rangle$

   Se cumple .... $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, T^*Tw\rangle$ .... (3)
3. Pero $T^*T = I$, entonces $\langle v, T^*Tw\rangle = \langle v, w\rangle$ .... (4)
4. Por (3) y (4): $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$, $\forall\, v, w \in W$.

3. DEFINICIÓN

Una matriz compleja $n \times n$, A, se llama ***unitaria***, si $A^* \cdot A = I$.

4. DEFINICIÓN

Una matriz $n \times n$ real, A, se dice ***ortogonal*** si $A^t \cdot A = I$. Esta definición nos indica que los vectores columna de la matriz A son vectores ortonormales.

PROBLEMA 1 Sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ un operador lineal cuya matriz de T en la base canónica es $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Hallar una base ortonormal para T

b) Hallar una matriz ortogonal P tal que $P^t AP$ sea diagonal.

Solución de a):

La matriz A es simétrica y por tanto, es posible hallar una base ortonormal para T.

Pasos a seguir:

1º Hallar el polinomio característico de A: $P(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$

2º Hallar los vectores propios asociados a cada valor propio:

- **Para $\lambda = 1$, se obtienen los vectores propios: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.**
- **Para $\lambda = 10$, se obtiene el vector propio $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.**

3º Formar la base ordenada $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

4º Ortonormalizar la base β, usando el algoritmo de Gram-Schmidt y se obtiene la base ortonormal $\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$

5º La matriz ortogonal es $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6º Se cumplen: $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ y $P^t=P^{-1}$.

PROBLEMA 2 Las siguientes afirmaciones respecto a una transformación lineal $T:V\longrightarrow W$, entre espacios vectoriales de dimensión finita provistos de producto interno, son equivalentes:

1) T preserva norma: $|Tv|=|v|$, para todo $v\in V$;
2) T preserva distancia: $|Tu-Tv|=|u-v|$, para todo $u,v\in V$;
3) T preserva producto interno: $\langle Tu,Tv\rangle=\langle u,v\rangle$, para todo $u,v\in V$;
4) $T^*T=I_V$;
5) La matriz de T relativa a ***cualquier*** par de bases ortonormales $E\subset V$, $F\subset W$ es una matriz ortogonal;
6) La matriza de T relativa a ***algún*** par de bases ortonormales $E\subset V$, $F\subset W$ es una matriz ortonormal;
7) T transforma ***alguna*** base ortonormal $E\subset V$ en un conjunto ortonormal $X\subset W$. (si $\dim V=\dim W$, X es una base).
8) T transforma ***toda*** base ortonormal $G\subset V$ en un conjunto ortonormal $Z\subset W$.

Demostración:

Se debe probar que: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (1).

- Si (1) es verdadero, probar que (1) implica a (2).

  Partimos de $|Tu-Tv|$, para todo $u,v\in V$.

  Pero T es lineal, entonces $Tu-Tv=T(u-v)$

  Luego $|Tu-Tv|=|T(u-v)|$ .... (a)

  Pero $(u-v)\in V$, porque $u,v\in V$; puesto que V es un espacio vectorial.

  Entonces en (a) aplicar la hipótesis (1): $|Tu-Tv|=|T(u-v)|=|u-v|$

- Si (2) es verdadero, probar que (2) implica a (3).

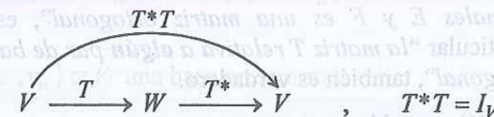
  Partimos de $\langle Tu,Tv\rangle$

  Por una propiedad de producto interno se tiene que:

  $$\langle Tu,Tv\rangle=\tfrac{1}{2}[|Tu|^2+|Tv|^2-|Tu-Tv|^2]$$
  $$=\tfrac{1}{2}[|Tu|^2+|Tv|^2-|u-v|^2]\ ,\quad \text{por (2)}$$
  $$=\tfrac{1}{2}[|Tu|^2+|Tv|^2-|u|^2+2\langle u,v\rangle-|v|^2]$$
  $$=\tfrac{1}{2}[|u|^2+|v|^2-|u|^2+2\langle u,v\rangle-|v|^2]\ ,\quad \text{por (1)}$$
  $$=\langle u,v\rangle$$

- Si (3) es verdadero, probar que (3) implica a (4).

  Bastará probar que $T^*Tu=u$.



$,\quad T^*T=I_V$

Veamos:

Por (3) se tiene $\langle u,v\rangle=\langle Tu,Tv\rangle$, para todo $u,v\in V$.

Porque T es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita provista de producto interno, existe T^*, tal que:

$$\langle T^*Tu,v\rangle=\langle Tu,(T^*)^*v\rangle$$
$$=\langle Tu,Tv\rangle=\langle u,v\rangle\ ,\quad (T^*)^*=T$$

La igualdad $\langle T^*Tu,v\rangle=\langle u,v\rangle$ implica $T^*T=I_V$

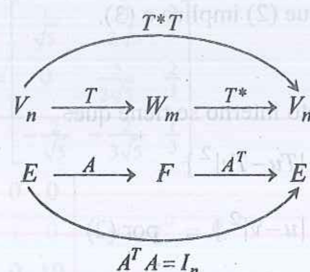
- Si (4) es verdadero, probar que (4) implica (5).

  Si E es una base ortonormal de V y F una base ortonormal de W, consideremos A, como la matriz de T en la base E y F.

  Por demostrar que $A^TA=I_n$

Veamos:

El siguiente diagrama



expresa que A^T (transpuesta de A) es la matriz de T^* en las bases ortonormales F y E. Por lo tanto, se cumple:

$A^T \cdot A = I_n$. Esta igualdad implica que A es una matriz ortogonal.

♦ Si (5) es verdadero, probar que (5) implica (6).

Si la proposición, de carácter universal, "*la matriz de T relativa a **cualquier** par de bases ortonormales E y F es una matriz ortogonal*", es verdadero; entonces la proposición particular "*la matriz T relativa a **algún** par de bases ortonormales E y F es una matriz ortogonal*", también es verdadero.

Así, (5) implica (6), es evidente.

♦ Si se cumple (6), probar que (6) ⇒ (7).

Eligiendo dos bases ortonormales: $E=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base de V y $F=\{w_1,\ldots,w_m\}$ base de W; probar que los elementos $x_j = Tv_j$, $j=1,\ldots,n$ forman un conjunto ortonormal.

Veamos:

Sea $[a_{ij}]$ la matriz ortogonal de T en las bases E y F.

Como $T: V_n \longrightarrow W_m$ es una transformación lineal, entonces de las combinaciones lineales $Tv_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k$ y $Tv_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k$.

obtenemos $\langle Tv_i, Tv_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, a_{kj}$, pues $\langle w_i, w_j\rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$

donde la suma $\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, a_{kj}$ es el producto escalar de los vectores columna de la matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$. como esta matriz es ortogonal puede ocurrir que $\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, a_{kj} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$.

Esto es, $\langle Tv_i, Tv_j\rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$.

(*) Lo cual prueba que los vectores $Tv_i = x_i$, $i=1,\ldots,n$ que son vectores de W, forman un conjunto ortonormal.

Si $\dim V = \dim W$, es obvio que $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ es una base ortonormal.

♦ Si (7) es verdadero, probar que (7) implica (8).

Punto de partida: Suponer que $G=\{u_1,\ldots,u_n\} \subset V$ es una base ortonormal ***cualquiera***.

Por (7), sea $E=\{v_1,\ldots,v_n\} \subset V$ una base ortonormal.

$$E \xrightarrow{P} G \qquad\qquad T: V \longrightarrow W$$
$$v_i \longrightarrow u_i \qquad\qquad u_i \longrightarrow Tu_i = z_i$$

Para $i,j=1,\ldots,n$ tenemos $u_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} v_k$ y $u_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} v_k$ donde la matriz de paso $P=[p_{ij}]$ es ortogonal.

Ahora, formemos el conjunto $Z=\{z_1,\ldots,z_n\}$ con $z_i = T u_i$.

Debo probar que Z es un conjunto ortonormal.

Para $i,j=1,\ldots,n$ tenemos: $z_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\, Tv_k = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\, x_k$ .... ver (*)

y $z_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\, x_k$

Como $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ es ortonormal, resulta que:

$$\langle z_i, z_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\, p_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ , & i \neq j \\ 1 \ , & i = j \end{cases}$$

↑ es el producto interno de los vectores columna de la matriz $P = [p_{ij}]$

En consecuencia Z es un conjunto ortonormal.

♦ Si se cumple (8), debo probar que (8) implica (1).
Considerando $E = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base ortonormal debo probar que $|Tv| = |v|$ para todo vector $v \in V$.

Veamos:
Si E es una base ortonormal, entonces cualquier vector $v \in V$ es combinación lineal de los vectores v_i, esto es, existen escalares α_i, tal que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ .... (**)

La norma del vector v es $|v|^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$ .... (I)

Porque $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, se cumple de (**):

$$Tv = \alpha_1 Tv_1 + \ldots + \alpha_n Tv_n$$

Como $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\} \subset W$ es un conjunto ortonormal, entonces

$$|Tv|^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Comparando (I) y (II) obtenemos: $|Tv|^2 = |v|^2$

$$\Rightarrow \quad |Tv| = |v|$$

OBSERVACIONES:

1. Una **transformación lineal** $T : V \longrightarrow W$ se llama **ortogonal** si cumple una de las ocho condiciones del teorema 2.
2. En particular, **un operador lineal** $T : V \longrightarrow V$ se llama **ortogonal** si $A^* = A^{-1}$. Porque el **operador lineal** $T : V \longrightarrow V$ sea **ortogonal**, es suficiente que $T^* \cdot T = I_V$ o que $T \cdot T^* = I_V$.

PROBLEMA 3

1. Los únicos autovalores posibles para un **operador ortogonal** $T : V \longrightarrow V$ son $+1$ y -1.
2. Si u y v son autovectores del operador ortogonal T, con $Tu = u$ y $Tv = -v$, entonces u y v son ortogonales.

Demostración de 1:

- Si λ es algún autovalor de T, entonces existe un vector $v \neq 0$, $v \in V$ tal que,
  $Tv = \lambda v$ .... (a)
- Como T es operador ortogonal, por el Teorema 2 parte (1), se cumple:
  $|Tv| = |v|$ .... (b)
- Sustituir (a) en (b): $|\lambda v| = |v| \iff |\lambda||v| = |v|$
  $\iff |\lambda| = 1 \iff \lambda = +1 \ \vee \ \lambda = -1$

Demostración de 2:
Partir de $\langle u, v\rangle$ y probar que $\langle u, v\rangle = 0$

Veamos:
Por datos del problema, se tiene que $Tu = u$ y $Tv = -v$, entonces
$\langle u, v\rangle = \langle Tu, -Tv\rangle = \langle u, -T^*Tv\rangle$, pero $T^*T = I$, entonces

$= \langle u, -v\rangle$

$= -\langle u, v\rangle$

$\langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle = 0$

$2\langle u, v\rangle = 0$

$\langle u, v\rangle = 0$. Este resultado prueba que u y v son ortogonales. ■

PROBLEMA 4

a) ¿Cuándo una matriz $A = [a]$, 1×1 es ortogonal?

Solución:
A es ortogonal si, y solo si, $A^t \cdot A = I$

$$a \cdot a = 1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$$

b) ¿Cuándo una matriz $A = [a]$, $a \in \mathbb{C}$, 1×1 es unitaria?

Solución:
A es unitaria, sí y solo si $A^* \cdot A = I$, $A^* = \overline{A}^t = \overline{a}$, $\overline{a}$ es la conjugada de a.

$$\overline{a} \cdot a = 1 \iff \|a\| = 1$$

$$\iff a = e^{i\theta} \ , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

c) ¿Cuándo la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es ortogonal?

Solución:

A es ortogonal sí y solo si $A^t = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Al igualar obtenemos las siguientes relaciones: $c=-a$, $c=\pm b$, $d=\frac{a^2}{b} \Rightarrow d=\pm a$

Las posibilidades son $\begin{cases} c=-b \ , \ d=a \\ c=b \ , \ d=-a \end{cases}$

Por lo tanto, A es ortogonal si, y solo si

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, los vectores columna son ortogonales.

$u \quad v$ ⇓ $\det A = a^2+b^2 = 1$ si u y v son unitarios

$u \quad v$ ⇓ $\det A = -(a^2+b^2) = -1$ si u y v son unitarios

d) Usando funciones trigonométricas, el anterior caso se puede resumir haciendo lo siguiente:

Si los vectores $u=(a,-b)$, $v=(b,a)$ son ortoganales y unitarios entonces existe un número real θ, tal que $\begin{cases} a=\cos\theta \\ b=\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Así tendremos $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ que es una matriz ortogonal.

Es muy conocida la matriz ortogonal $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ que es la matriz asociada a la rotación de los ejes XY.

e) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a, b, c, d están en $\mathbb{C}$ ¿cuándo A es unitaria?

Solución:

A es unitaria sí, y solo si, $\overline{A}^t = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

La relación obtenida, es $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b}e^{i\theta} & \overline{a}e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, $a\in\mathbb{C}$, $b\in\mathbb{C}$, $|a|^2+|b|^2=1$.

PROBLEMA 5 Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función tal que $f(0)=0$ y $|f(\mu)-f(v)|=|\mu-v|$ para cualquier $u,v\in\mathbb{R}^n$. (O sea que f deja fijo el 0 y preserva las distancias). Pruebe:

a) Para todo $v\in\mathbb{R}^n$, se tiene $|f(v)|=|v|$.

b) Para cualquier $u,v\in\mathbb{R}^n$, se tiene $\langle f(u),f(v)\rangle=\langle u,v\rangle$. [use la igualdad $\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}(|u|^2+|v|^2-|u-v|^2)$]

c) Los vectores $u_1=f(e_1),\ldots,u_n=f(e_n)$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

d) Para todo $v=x_1e_1+\ldots+x_ne_n\in\mathbb{R}^n$, se tiene $\langle f(v),u_i\rangle=x_i$, luego $f(v)=x_1u_1+\ldots+x_nu_n$.

e) $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal, luego es ortogonal.

Demostración de a):

Para todo $v\in\mathbb{R}^n$ y $0\in\mathbb{R}^n$ se define: $|f(v)-f(0)|=|v-0|$. Pero $f(0)=0$, entonces $|f(v)-0|=|v-0|$ implica $|f(v)|=|v|$.

Demostración de b):

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\tfrac{1}{2}(|f(u)|^2+|f(v)|^2-|f(u)-f(v)|^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}(|u|^2+|v|^2-|u-v|^2) \quad \text{, pues} \begin{cases} \bullet\ |f(u)|=|u|\ ,\ |f(v)|=|v| \text{ según (a).} \\ \bullet\ |f(u)-f(v)|=|u-v| \end{cases}$$
$$=\langle u,v\rangle$$

Prueba de c):

Se debe probar que: $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 \ , & i \neq j \\ 1 \ , & i = j \end{cases}$

Por (b) se tiene: $\langle u_i, u_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \ , & i \neq j \\ 1 \ , & u = j \end{cases}$

Prueba de d):

Partir de $\langle f(v), u_i \rangle$, donde $u_i = f(e_i)$

Entonces $\langle f(v), u_i \rangle = \langle f(v), f(e_i) \rangle$. Aplicar (b):

$= \langle v, e_i \rangle$, pero $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

$= \langle x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i \rangle$

$= x_1 \underbrace{\langle e_1, e_i \rangle}_{0} + \ldots + x_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{1} + \ldots + x_n \underbrace{\langle x_n, e_i \rangle}_{0}$

$\langle f(v), u_i \rangle = x_i$ .... (1)

Probar que $f(v) = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$

Por ser $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de $I\!R^n$, entonces para todo $v \in I\!R^n$ se tiene que $f(v) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ .... (2)

Faltaría probar que $\alpha_i = x_i$.

Por (1) y (2) tenemos:

$x_i = \langle f(v), u_i \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_i \rangle + \ldots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \ldots + \alpha_n \langle u_n, u_i \rangle$

$= \alpha_1 \langle f(e_1), f(e_i) \rangle + \ldots + \alpha_i \langle f(e_i), f(e_i) \rangle + \ldots + \alpha_n \langle f(e_n), f(e_i) \rangle$

$= \alpha_1 \langle e_1, e_i \rangle + \ldots + \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle + \ldots + \alpha_n \langle e_n, e_i \rangle$

$= \alpha_i$

Prueba de e):

Por todo lo anterior, *f* es un operador lineal ortogonal.

> Una función $g : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ se llama **ISOMETRÍA** cuando:
>
> $$|g(u) - g(v)| = |u - v| \ , \ \forall \, u, v \in I\!R^n$$
>
> Si $T : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ es un operador (lineal) ortogonal y $b \in I\!R^n$ es un vector constante (independiente de *v*), toda **ISOMETRÍA ES UNA FUNCIÓN** $g : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ definida por $g(v) = Tv + b$.

TEOREMA 3. Sea *V* un espacio con producto interno de dimensión finita y sea *T* un operador lineal sobre *V*. Supóngase que *W* es un subespacio de *V* que es invariante por *T*. Entonces el complemento ortogonal de *W* es invariante por *T**.

Demostración:

HIPÓTESIS
- h_1 V e.v.p.i, $\dim V < \infty$
- h_2 $T : V \longrightarrow V$ es un operador lineal.
- h_3 $W \subset V$ es subespacio.
- h_4 $Tw \in W$ para $w \in W$, porque *W* es subespacio invariante.

TESIS
- $T^* v \in W^{\perp}$ para $v \in W^{\perp}$
- donde $W^{\perp}$ es el complemento ortogonal de *W*.

Bastará probar que: $\langle w, T^* v \rangle = 0$, $\forall \, w \in W$; para afirmar que $T^* v \in W^{\perp}$.

Veamos: Sea $v \in W^{\perp}$ .... (1)

Por h_4 $Tw \in W$ .... (2)

Por (2) y (1) se deduce que $\langle Tw, v \rangle = 0$ .... (3)

Pero $\langle Tw, v \rangle = \langle w, T^* v \rangle$ .... (4)

Por (3) y (4) obtenemos: $\langle w, T^* v \rangle = 0$.

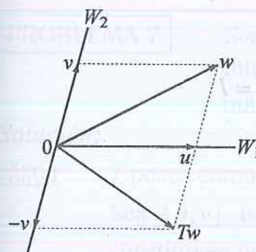
OBSERVACIÓN:

Definición.- Una **INVOLUCIÓN** es un operador lineal $T : V \longrightarrow V$ tal que $T^2 = I$, o sea $T(Tv) = v$, $\forall \, v \in V$.

PROBLEMA 6

Sea $T : V \longrightarrow V$ una involución. Los conjuntos

$W_1 = \{ u \in V \ ; Tu = u \}$ y $W_2 = \{ v \in V \ ; Tv = -v \}$



son subespacios vectoriales y $V = W_1 \oplus W_2$.

Para todo $w' = u + v$, con $u \in W_1$ y $v \in W_2$ se tiene $Tw = u - v$.

Además, $P = \frac{1}{2}(T + I)$ es la proyección sobre W_1, paralelamente a W_2.

Demostración:

$$\textbf{HIPÓTESIS}\begin{cases} h_1)\ T^2=T \quad \text{(porque es involutivo)} \\ h_2)\ W_1=\{u\in V\ ;Tu=u\} \\ \quad\ W_2=\{v\in V\ ;Tv=-v\} \end{cases}$$

$$\textbf{POR DEMOSTRAR}\begin{cases} 1.\ W_1 \text{ y } W_2 \text{ son subespacios vectoriales} \\ 2.\ V=W_1\oplus W_2 \\ 4.\ Tw=u-v, \text{ para todo } w=u+v, \text{ con } u\in W_1 \text{ y } v\in W_2 \\ 5.\ P^2=P \end{cases}$$

<u>**Prueba de 1.**</u> (es sencillo)

<u>**Prueba de 2.**</u> Bastará probar que $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$

Para todo $m\in W_1\cap W_2 \Rightarrow m\in W_1 \ \wedge\ m\in W_2$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$Tm=m \qquad Tm=-m$$
$$m=-m$$
$$2m=0$$
$$m=0$$

Este resultado, indica que el único elemento que tienen en común los subespacios W_1 y W_2 es el vector nulo. Esto es, $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.

<u>**Prueba de 3.**</u>

En la suma $w=u+v$, aplicar T.

obteniéndose $Tw=Tu+Tv$; pero $Tu=u$, porque $u\in W_1$ y $Tv=-v$, porque $v\in W_2$

$=u-v$

<u>**Prueba de 4.**</u>

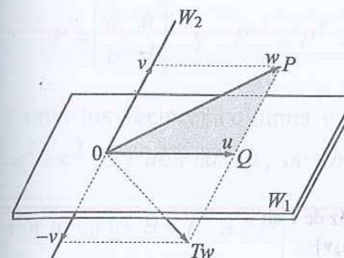
$$P^2=\left[\tfrac{1}{2}(T+I)\right]^2=\tfrac{1}{4}(T^2+2T+I^2) \quad , \quad \text{pero } T^2=I \ , \ I^2=I$$
$$=\tfrac{1}{4}(I+2T+I)$$
$$=\tfrac{1}{4}(2T+2I)$$
$$=\tfrac{1}{2}(T+I)=P$$

- Además, de las igualdades: $w=u+v$ y $Tw=u-v$; al sumar se obtienen: $u=\frac{1}{2}(w+Tw)$ y $v=\frac{1}{2}(w-Tw)$.
- También, se cumplen: $Nu(P)=W_2$ y $Im(P)=W_1$

ꙮ

Aplicación Geométrica:

La involución $T:I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ es la reflexión de T respecto del hiperplano W_1, paralelamente a la recta W_2.



La reflexión de w es Tw, respecto al hiperplano W_1. Al decir paralelamente a la recta W_2 se refiere que $\overline{PQ}$ es paralela a la recta W_2, $\dim W_1=2$, $\dim W_2=1$, $\dim I\!R^3=3=\dim W_1+\dim W_2$.

Si W_2 es ortogonal a W_1, entonces la involución $T:I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ es una ***reflexión ortogonal.***

Si un operador lineal $T:V\longrightarrow V$ es ortogonal $(T^*T=I)$ y autoadjunto $(T^*=T)$, entonces $TT=I$ (T es una involución), es decir T es una reflexión ortogonal.

En consecuencia, T es ortogonal y T es autoadjunto implica T es una involución. Por el problema 6, se deduce que los vectores no nulos u y v son los autovectores de V correspondiente a los autovalores $+1$ y -1, respectivamente.

Como $W_2=(W_1)^{\perp}$, al unir la base ortonormal de W_1 con la base ortonormal de W_2, se obtiene una base ortonormal de V respecto a la cual la matriz de T es diagonal de la forma $D=(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$.

PROBLEMA 7	Sea V un espacio vectorial de dimensión 2, provisto de un producto interno y $T:V\longrightarrow V$ un operador ortonormal. ¿Cómo puede ser la matriz de T?

Solución:

<u>CASO 1.</u> T posee como único valor propio: 1

Sea $\{u,v\}$ un conjunto de vectores propios, unitarios y ortogonales de V que constituyen una base de V.

Como 1 es el único valor propio de T entonces $Tu = 1\cdot u$ y $Tv = 1\cdot v$

Además $\begin{cases} Tu = 1\cdot u + 0\cdot v \\ Tv = 0\cdot u + 1\cdot v \end{cases}$

Entonces $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de T en la base $\{u,v\}$

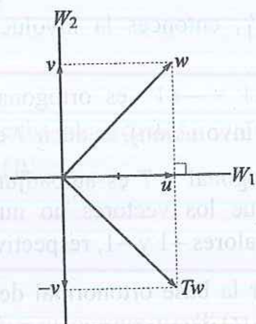
CASO 2. T posee como único valor propio: -1

Con un razonamiento similar, se concluye que la matriz asociada a T en la base $\{u,v\}$ es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

CASO 3. T tiene dos autovalores: 1 y -1

En este caso tendremos $Tu = 1\cdot u$ y $Tv = -1\cdot v$

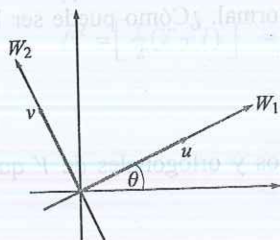
Pero $\begin{cases} Tu = 1\cdot u + 0\cdot v \\ Tv = 0\cdot u - 1\cdot v \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Es la matriz de T en la base $\{u,v\}$.



En este caso, T es la ***reflexión ortogonal*** respecto al eje que contiene al vector u.

CASO 4. T no tiene autovalores reales.

En este, al suponer que $U = \{u,v\} \subset V$ es una base ortonormal, donde $u = (a,c)$ y $v = (b,d)$ son ortogonales y unitarios.



Como $u = (a,c)$ es unitario, entonces existe $\theta \in I\!R$ tal que $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$.

Entonces $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Como v es ortogonal al vector u, entonces:

$$v = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

Cualquier vector $w \in V$ es
$$\begin{aligned} w &= x'u + y'v \\ &= x'(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz de T en la base $\{u,v\}$ es $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

- Si elegimos otra base $U' = \{u', v'\} \subset V$, la nueva matriz de T es $B = P^{-1}AP$, donde $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Como los vectores columna y los vectores fila de P y P^T son ortonormales se cumplen: $a^2 + c^2 = 1$, $ab + cd = 0$, $ac + bd = 0$, $ad - bc = 1$ o $ad - bc = -1$, $b^2 + d^2 = 1$.

Por lo tanto $B = P^T AP = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, si $ad - bc = 1$

o $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$, si $ad - bc = -1$

PROBLEMA 8 Sea $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ un operador ortogonal en el espacio euclideano tridimensional. Entonces existe una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\} \subset I\!R^3$ respecto a la cual la matriz de T tiene una de las siguientes formas:

1. Si los tres valores propios de T son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, entonces existen los vectores propios u_1, u_2, u_3, tal que $Tu_1 = 1\cdot u_1$, $Tu_2 = 1\cdot u_2$, $Tu_3 = 1\cdot u_3$ y $A = I$
2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, entonces $A = -I$

Si $A \neq \pm 1$, ocurre los siguientes casos:

CASO 1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$,

entonces $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

CASO 2. Si $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, entonces $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CASO 3. Si $\lambda_1 = 1$, λ_2 y λ_3 son números complejos, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

CASO 4. Si $\lambda_1 = -1$, λ_2 y λ_3 son números complejos, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

7.11. OPERADORES NORMALES

Definición.- Sean V un espacio con producto interno de dimensión finita y $T: V \longrightarrow V$ un operador lineal sobre V. Se dice que T es ***normal*** si conmuta con su adjunto; es decir, $T \cdot T^* = T^* \cdot T$.

OBSERVACIÓN:
Sea A la matriz de T en alguna base de V, tenemos:
1) Sobre $\mathbb{C}$, $A^* = \overline{A}^t$. Entonces A es normal, si $A \cdot \overline{A}^T = \overline{A}^T \cdot A$
2) Sobre $\mathbb{R}$, $A^* = A^t$. Entonces A es normal, si $A \cdot \overline{A}^T = \overline{A}^T \cdot A$
3) Todo operador autoadjunto es normal.
4) Todo operador unitario es normal.

TEOREMA 1. Sea V un espacio con producto interno y T un operador lineal autoadjunto sobre V. Entonces todo valor propio de T es real y los vectores propios de T, asociados a valores propios distintos, son ortogonales.

Demostración:

HIPÓTESIS
- h_1 V es un e.p.i.
- h_2 T es autoadjunto
- h_3 λ un valor propio de T.

TESIS
- (1) $\lambda = \overline{\lambda}$ ...... (Cuando un número complejo es igual a su conjugada entonces es un número real).
- (2) $\langle u,v\rangle = 0$ ... , u, v vectores propios asociados a los valores propios α y β respectivamente.

Veamos:

Prueba de (1):

- Sea λ un valor propio de T, entonces existe un vector $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.
- Partir de $\lambda\langle v,v\rangle$.
- Aplicando, sucesivamente, las propiedades de producto interno y de la hipótesis h_2, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda\langle v,v\rangle &= \langle \lambda v,v\rangle \quad , \quad \text{pero } \lambda v = Tv \\ &= \langle Tv,v\rangle \\ &= \langle v,Tv\rangle \quad , \quad \text{por } h_2 \\ &= \langle v,\lambda v\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle v,v\rangle \end{aligned}$$

- Como $\langle v,v\rangle \neq 0$, obtenemos $\lambda = \overline{\lambda}$

Prueba de (2):

- Sean $Tu = \alpha u$ y $Tv = \beta v$, $\alpha \neq \beta$, u y v vectores propios.
- Partir de $\alpha\langle u,v\rangle$ y aplicar, sucesivamente, las propiedades de producto interno, que T es autoadjunta y $\overline{\beta} = \beta$.

$$\begin{aligned} \alpha\langle u,v\rangle &= \langle \alpha u,v\rangle \\ &= \langle Tu,v\rangle = \langle u,Tv\rangle = \langle u,\beta v\rangle = \overline{\beta}\langle u,v\rangle = \beta\langle u,v\rangle \end{aligned}$$

- La igualdad $\alpha\langle u,v\rangle = \beta\langle u,v\rangle$ implica.

$$(\alpha-\beta)\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0 \quad , \quad \text{porque } \alpha-\beta \neq 0 .$$

Ejemplo 01
a) Los operadores autoadjuntos son normales
b) Los operadores ortogonales son normales.
c) Las matrices simétricas son normales.
d) Las matrices ortogonales cuadradas son normales.

Ejemplo 02 Para que una matriz cuadrada $A=\begin{bmatrix} a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ sea normal, debe cumplir que $c=-b$ y $d=a$. Por lo tanto, la matriz A debe ser $A=\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$.

Para llegar a este resultado, bastará resolver la ecuación $A\cdot A^T = A^T\cdot A$.

Se obtienen las ecuaciones
$$\begin{cases} a^2+c^2=a^2+b^2 \;\Rightarrow\; c=\pm b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)\\ ad+cd=ac+bd \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)\\ ab+cd=ac+bd \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)\\ b^2+d^2=c^2+d^2 \;\Rightarrow\; c=\pm b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4)\end{cases}$$

Si en (1) elegimos $\boxed{c=-b}$ y reemplazamos en (3) obtenemos:

$$ab-bd=-ab+bd \iff 2ab-2bd=0$$
$$\iff 2b(a-d) \iff \boxed{d=a}\text{ , cuando } b\neq 0$$

Forma trigonometría de la matriz normal $A=\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$. Si $A\neq 0$ y $\mu=\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} -b\\ a\end{bmatrix}$ son ortogonales, existe $\theta\in IR$ tal que $a=r\cos\theta$, $b=r\,sen\,\theta$, donde $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Entonces la matriz normal A se puede expresar como $A=r\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.

OPERADOR ANTISIMÉTRICO

Definición.- Un operador lineal $T:V\longrightarrow V$ se denomina ***antisimétrico*** cuando $T^*=-T$, es decir, si $\langle Tu,v\rangle=-\langle u,Tv\rangle$ para cualquier $u,v\in V$.

Para que T sea antisimétrico, es necesario y suficiente que su matriz $[a_{ij}]$ respecto a una base ortonormal de T sea antisimétrico, esto es, $a_{ij}=-a_{ji}$, para $i,j=1,\ldots,n$.

Propiedad.- Todo operador antisimétrico es normal.

PROBLEMA 1 Sea $T=T_1+T_2$ la descomposición del operador T como suma del operador autoadjunto T_1 con el operador antisimétrico T_2. Pruebe que T es normal si, y solamente si, $T_1T_2=T_2T_1$.

Prueba:

Si T es normal, entonces $\quad T\cdot T^*=T^*\cdot T$

$$(T_1+T_2)\cdot(T_1+T_2)^*=(T_1+T_2)^*\cdot(T_1+T_2)$$
$$(T_1+T_2)\cdot(T_1^*+T_2^*)=(T_1^*+T_2^*)\cdot(T_1+T_2)$$
$$\underline{T_1\cdot T_1^*}+T_1\cdot T_2^*+T_2\cdot T_1^*+\underline{T_2\cdot T_2^*}=\underline{T_1^*\cdot T_1}+T_1^*\cdot T_2+T_2^*\cdot T_1+\underline{T_2^*\cdot T_2}$$

Los operadores autoadjuntos y antisimétricos son NORMALES, por tal razón se tiene: $T_1\cdot T_1^*=T_1^*\cdot T_1$, $T_2\cdot T_2^*=T_2^*\cdot T_2$

Al simplificar: $\quad T_1\cdot T_2^*+T_2\cdot T_1^*=T_1^*\cdot T_2+T_2^*\cdot T_1$

Pero $\begin{cases} T_1^*=T_1\\ T_2^*=-T_2\end{cases}$
$$-T_1\cdot T_2+T_2\cdot T_1=T_1\cdot T_2-T_2\cdot T_1$$
$$2T_2\cdot T_1=2T_1\cdot T_2$$
$$T_2\cdot T_1=T_1\cdot T_2$$

PROBLEMA 2 **Para cada una de las siguientes matrices simétricas reales, A, hallar una matriz ortogonal real P tal que P^tAP sea diagonal.**

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta\\ sen\,\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

Resolución de a).

- Los valores propios son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$.
- Vectores propios:

asociado a $\lambda_1=0$ es $u=\begin{bmatrix} 1\\ -1\end{bmatrix}$

asociado a $\lambda_2=2$ es $v=\begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix}$

La matriz $P=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

Los vectores columna de la matriz normal P son ortogonales.

Resolución de b).

- Los vectores propios son: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$.
- Vectores propios:

asociado a $\lambda_1=-1$ es $u=\begin{bmatrix} 1\\ -1\end{bmatrix}$

asociado a $\lambda_2=3$ es $v=\begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución de c).

- Los valores propios son $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$
- Vectores propios:

asociado a $\lambda_1=-1$ es $u=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{sen\,\theta} \end{bmatrix}$

asociado a $\lambda_2=1$ es $v=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{(1+\cos\theta)}{sen\,\theta} \end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{sen\,\theta} & -\frac{(1+\cos\theta)}{sen\,\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} sen\,\theta\neq 0 \\ \theta\neq 0,\pi \end{matrix}$$

Una base ortonormal de V es $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

T es normal en la base B.

PROBLEMA 3

Sea $V=\mathbb{C}^2$, con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V representado en la base canónica por la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

Demostrar que T es **NORMAL** y hallar una base ortogonal de V que consista en vectores propios de T.

Resolución:

- Los valores propios son: $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$
- Vectores propios:

asociados a λ_1 es $u=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

asociados a λ_2 es $v=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Determinar qué matriz es normal:

a) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$

Respuestas: a) No es normal , b) B es normal

02 Sea T un operador normal. Demostrar:

a) $T(v)=0$ si y sólo si $T^*(v)=0$.

b) $T-\lambda I$ es normal.

c) Si $T(v)=\lambda v$, necesariamente $T^*(v)=\overline{\lambda}v$, luego todo vector propio de T lo es también de T^*.

d) Si $T(v)=\lambda_1 v$ y $T(w)=\lambda_2 w$ con $\lambda_1\neq\lambda_2$, necesariamente $\langle v,w\rangle=0$; o sea, vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

OPERADORES AUTOADJUNTOS

Un operador T es autoadjunto si, y sólo si $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T(w)\rangle$, $\forall\, v,w\in V$

03 Sea V un espacio con producto interno, y sean $T,U\in\mathfrak{L}(V)$, donde $\mathfrak{L}(V)$ es el espacio vectorial de los operadores de V en V.

a) Si T y U son autoadjuntos, entonces $T+U$ es autoadjunto.

b) Si T es autoadjunto y r es real, luego rT es autoadjunto.

c) Si T y U son autoadjuntos, entonces TU es autoadjunto si, y sólo si $TU=UT$.

d) Si T es autoadjunto e inversible, entonces T^{-1} también lo es.

04 Sea V un espacio con producto interno.

a) Si T es autoadjunto, entonces $\langle T(v),v\rangle$ es real, para todo $v\in V$.

b) Si V es complejo y $\langle T(v),v\rangle$ es real para todo $v\in V$, entonces T es autoadjunto.

c) Si T es autoadjunto y $\langle T(v),v\rangle=0$ para todo $v\in V$, entonces $T=0$.

d) Si T es autoadjunto, luego $T^k(v)=0$ para algún $k>0$ implica que $T(v)=0$.

e) Si T es autoadjunto, entonces toda raíz compleja del polinomio característico (y también el polinomio minimal) de T es real.

f) Si λ, μ son autovalores distintos de un operador autoadjunto T, entonces $E_\lambda \perp E_\mu$.

Sugerencias:

a) Bastará probar que $\langle T(v),v\rangle = \overline{\langle T(v),v\rangle}$

b) Bastará probar que $\langle (T-T^*)(v),v\rangle = 0$

c) Bastará probar que $0 = 2\langle T(x),y\rangle$

d) Si $T^k(v)=0$, $\forall\, v\in V$, entonces $T^{2^m}(v)=0$ para algún m.

Probar que $T^{2^{m-1}}=0$, por inducción $T=0$.

e) Probar que $\lambda=\bar{\lambda}$, para λ valor propio de T.

f) Para $\lambda\neq\mu$, probar que $\langle v,w\rangle=0$; $v,w\neq 0$.

OPERADORES UNITARIOS

T es unitario si, y sólo si $\langle T(v),w\rangle = \langle v,T^{-1}(w)\rangle \;\; \forall\, v,w\in V$

05 Sea V un espacio con producto interno, y sea $T,U\in \mathfrak{L}(V)$.

a) T es unitario, entonces T^{-1} es unitario.

b) Si T, U son unitarios, entonces TU es unitario.

c) T es unitario si, y sólo si es una isometría suryectiva.

d) Si $\dim(V)<\infty$, entonces T es unitario si, y sólo si T lleva una base ortonormal en otra base ortonormal.

e) Si T es unitario y λ es un valor propio de T, entonces $|\lambda|=1$.

Sugerencias:

c) Partiendo de $\langle T(v),T(w)\rangle$, probar que $T^*T=I$.

d) Eligiendo una base ortonormal $\varphi=\{u_1,\ldots,u_n\}$ y usando δ_{ij}, probar que $\langle T(v),T(w)\rangle=\langle v,w\rangle$.

e) Partiendo de $T(v)=\lambda v$, probar que $\lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$.

06 Sea A una matriz. Demostrar que:

a) Una matriz A $n\times n$, es unitaria si, y sólo si las columnas de A forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{C}^n$.

b) Una matriz A $n\times n$, es unitaria si, y sólo si las filas de A forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{C}$.

c) Si A es unitario, entonces $|\det(A)|=1$. En particular, si A es ortogonal, entonces $\det(A)=\pm 1$.

OBSERVACIÓN:

A es unitaria si, y sólo si $A^*A=I$, lo cual es equivalente a decir que las filas de A son ortonormales.

A es unitaria si, y sólo si $A^*A=I$, lo cual es equivalente a decir que las columnas de A son ortonormales.

c) Partir de $A^*A=I$ y aplicar propiedad de los determinantes.

OPERADORES NORMALES

07 Sea V un espacio con producto interno, y sea T un operador normal sobre V.

Demostrar:

a) Para todo polinomio $p(x)\in \mathbb{K}[x]$, el operador $P(T)$ es también normal.

b) $T(v)=0 \;\Rightarrow\; T^*(v)=0$.

c) $T^k(v)=0$ para algun $k>0 \;\Rightarrow\; T(v)=0$

d) Para algún $\lambda\in\mathbb{K}$, $(T-\lambda)^k(v)=0 \;\Rightarrow\; (T-\lambda)(v)=0$

e) Si $T(v)=\lambda v$, luego $T^*(v)=\bar{\lambda}(v)$

f) Si λ, μ son autovalores distintos de T, entonces $E_\lambda\perp E_\mu$

Sugerencias:

c) Es fácil, ver que el operador $U=TT^*$ es autoadjunto, y por tanto T es normal, tenemos así:

$U^k(v)=(T^*)^k(T)^k(v)=0$ y por el ejercicio 4., $U(v)=0$, que es, $TT^*(v)=0$.

Luego $0=\langle TT^*(v),v\rangle=\langle T(v),T(v)\rangle$ y así $T(v)=0$.

d) de (d) sigue las partes (a) y (c).

e) Suponer que $T(v)=\lambda v$, $v\neq 0$. Entonces $(T-\lambda)(v)=0$. Por tanto, de acuerdo a la parte (b) $(T-\lambda)^*(v)=0$. Pero $(T-\lambda)^*=T^*-\overline{\lambda}$.

f) Haciendo $T(v)=\lambda v$ y $T(w)=\mu w$ y partiendo de $\lambda\langle v,w\rangle$, probar que $\langle v,w\rangle=0$.

08 Si T es autoadjunto, demostrar que T^n es autoadjunto para $n\in I\!N$.

09 Sea $T\in\mathcal{L}(V)$ y sean $T_1=\frac{1}{2}(T+T^*)$ y $T_2=\frac{1}{2i}(T-T^*)$. Demostrar que T_1 y T_2 son autoadjuntos, y que $T=T_1+iT_2$, $T^*=T_1-iT_2$.
¿Qué puede decir acerca de la unicidad de estas representaciones de T y T^*?

10 Demostrar que un operador autoadjunto diferente del operador nulo, no puede ser nilpotente.

11 Probar que todas las raíces del polinomio característico de una matriz hermitiana transpuesta son imaginarios puros.

12 Si T es unitario, probar que T^{-1} es unitario.

13 Si T y U son unitarios, entonces TU es unitario.

14 Probar que un operador normal es unitario si, y sólo si todos sus autovalores tiene valor absoluto 1.

15 Sea T un operador unitario sobre un espacio vectorial V con producto interno de dimensión finita. Demostrar que si S es un subespacio invariante en V bajo T, entonces $S^{\perp}$ es invariante bajo T.

16 Probar que si $\|T(v)\|=\|T^*(v)\|$ $\forall v\in V$, donde V es complejo, entonces T es normal.

17 Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, y sea T un operador normal sobre V.

a) Probar que si T es idempotente, entonces es autoadjunta.

b) Probar que si T es nilpotente, entonces $T=0$.

c) Probar que si $T^2=T^3$, entonces T es idempotente.

18 Hallar la adjunta de cada una de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{bmatrix}5-2i & 3+7i\\ 4-6i & 8-3i\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}3 & 5i\\ i & -2i\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

Respuestas:

a) $\begin{bmatrix}5+2i & 4+6i\\ 3-7i & 8-3i\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}3 & -i\\ -5i & 2i\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

19 Defínase $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ por $T(x,y,z)=(x+2y,3x-4z,y)$. Hallar $T^*(x,y,z)$

Respuesta:

$T^*(x,y,z)=(x+3y,2x+z,-4y)$

20 Defínase $T:\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3$ por $T(x,y,z)=(ix+(2+3i)y,3x+(3-i)z,(2-5i)y+iz)$
Hallar $T^*(x,y,z)$

Respuesta: $T^*(x,y,z)=(-ix+3y,(2-3i)x+(2+5i)z,(3+i)y-iz)$

21 Para cada uno de los siguientes funcionales lineales ϕ en V, encontrar un vector $u\in V$ tal que $\phi(v)=\langle v,u\rangle$ para todo $v\in V$.

a) $\phi: I\!R^3\longrightarrow I\!R$ definido por $\phi(x,y,z)=x+2y-3z$

b) $\phi:\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}$ definido por $\phi(x,y,z)=ix+(2+3i)y+(1-2i)z$

c) $\phi: V\longrightarrow I\!R$ definido por $\phi(f)=f(1)$, donde V es el espacio vectorial de los polinomios sobre $I\!R$ con producto interno definido mediante
$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$$

Respuestas:

a) $u=(1,2,-3)$

b) $u=(-i,2-3i,1+2i)$

c) $u=(18t^2-8t+13)/15$.

MISCELÁNEA

01. Dados los vectores $v=(2,-1,-2)$, $w=(3,-6,-6)$, determine el operador autoadjunto $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ tal que $Tv=(1,1,13)$ y $Tw=(3,21,33)$ sabiendo que la traza de la matriz asociada a T es 5.

02. Dados los vectores $u=(4,4,-2)$, $v=(4,-2,4)$ y $w=(1,-2,-2)$, sea $T: I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ el operador lineal, tal que $Tu=(10,-2,-2)$, $Tv=(-2,10,-2)$ y $Tw=(1,1,-5)$. Demuestre que T es autoadjunto.

03. Si $T^*T=-T$, pruebe que los autovalores de T pertenecen al conjunto $\{0,-1\}$. De un ejemplo de una matriz $A\in M(2,2)$, tal que $a_{11}=\frac{1}{3}$ y $A^T\cdot A=-A$. ¿Cuántas de estas matrices existen?

04. Sean $T_1: V\longrightarrow W$ y $T_2: V\longrightarrow U$ transformaciones lineales inversibles (W y U son espacios de dimensión finita, provistos de producto interno). Pruebe que existe una transformación ortogonal (inversible) $T_3: W\longrightarrow U$ con $T_2=T_3T_1$ si, y solo si, $|T_1(v)|=|T_2(v)|$, para todo $v\in V$.

05. Para dos bases ortonormales arbitrarias $\beta=\{u_1,\ldots,u_n\}\subset V$ y $\beta'=\{v_1,\ldots,v_n\}\subset V$, pruebe que existe un operador ortogonal $T:V\longrightarrow V$ tal que $Tu_1=v_1,\ldots,Tu_n=v_n$. Si las bases dadas son formadas por los vectores $u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)$, $u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)$, $u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)$ y $v_1=\frac{1}{3}(2,3,6)$, $v_2=\frac{1}{7}(6,2,-3)$, $v_3=\frac{1}{7}(3,-6,2)$ en $I\!R^3$, determine la matriz T en la base canónica de $I\!R^3$.

06. Pruebe que la matriz $\begin{bmatrix}-34 & 12\\ 12 & -41\end{bmatrix}$ es negativa.

07. Halle la descomposición polar de las matrices:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

08. Sea $T: I\!R^4 \longrightarrow I\!R^4$ el operador lineal definido por:

$$T(x,y,z,t)=(y-z+t,-x-z+2t,x+y-t,-x-2y+z)$$

Demuestre que T es antisimétrico. Encuentre bases ortonormales $\{u,v\}\subset N(T)$ y $\{u',v'\}\subset N(T)^{\perp}$. Determine la matriz de T en la base $\{u,v,u',v'\}\subset I\!R^4$.

CAPÍTULO 8

ALGUNAS APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL

1. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

Definición.

Sea V un $I\!K$ -espacio vectorial con producto interno.

La aplicación $f: V^2 \longrightarrow I\!K$ es una forma bilineal sobre V sí, y sólo si es lineal respecto a los dos argumentos:

i) $f(ax+bx',y)=af(x,y)+bf(x',y)$; $\forall\, x,x',y\in V$; $a,b\in I\!K$

ii) $f(x,cy+dy')=cf(x,y)+df(x,y')$; $\forall\, x,y,y'\in V$; $c,d\in I\!K$.

Ejemplo.-

Asociada a la matriz $A\in I\!K^{n\times n}$, la aplicación $f: I\!K^n\times I\!K^n \longrightarrow I\!K$ definida por $f(X,Y)={}^tX\cdot A\cdot Y$ es una forma bilineal en $I\!K^n$.

1.1 MATRIZ DE UNA FORMA BILINEAL

Sea V un $I\!K$-espacio vectorial de dimensión $n\geq 1$ con P.I. Consideremos una base $[v]=\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V y la forma bilineal $f: V^2 \longrightarrow I\!K$.

Entonces f está caracterizada por la matriz $A=[a_{ij}]$ cuyos elementos a_{ij} están definidas por $a_{ij}=f(v_i,v_j)$.

A es la matriz de f respecto a la base $[v]$.

En efecto, si X, Y son dos vectores de V, entonces: $X=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $Y=\sum_{j=1}^{n} y_j v_j$

Luego: $f(X,Y)=\left\langle \sum x_i v_i , \sum y_j v_j \right\rangle$

$$=\sum_i \sum_j x_i y_i f(v_i,v_j)$$

♦ *P.I.* = producto interno.

$$f(X,Y)=\sum_i \sum_j x_i\, y_i\, a_{ij}$$

$$=\sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j = X^t A Y$$

donde $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ cuyos elementos son las coordenadas de X e Y respecto de la base $[v]$.

1.2 FORMA BILINEAL SIMÉTRICA

Definición.- Sea $f: V^2 \longrightarrow I\!K$ una forma bilineal, f es simétrica si, y solo si $f(x,y)=f(y,x),\ \forall\, x,y \in V$.

Ejemplo.-

Si $I\!K = I\!R$, la aplicación $f: V^2 \longrightarrow I\!R$ definida por $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ es una forma bilineal simétrica.

Además:

i) Si $[V]=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V, o sea $\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ \forall\, i \neq j$, entonces la matriz de $f(x,y)=\langle x,y\rangle$ es diagonal.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & a_n \end{bmatrix}$$

y la forma se dice diagonalizada.

ii) Si $[V]=\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es una base ortonormal, entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Demostración: *i)* $f(X,Y)=\langle x,y\rangle$

$$=\left\langle \sum x_i v_i, \sum y_j v_j \right\rangle$$

$$f(X,Y)=\sum_i \sum_j x_i\, y_j \langle v_i, v_j\rangle$$

donde $\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ a_i, & j = i \end{cases}$

Entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, y_i$

ii) Si $[V]$ es una base ortonormal, se cumple: $\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$

Entonces $f(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

PROPIEDAD. La matriz $A \in I\!K^{n\times n}$ representa una forma bilineal simétrica si, y sólo si, A es simétrica.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si A es una matriz asociada a una forma bilineal simétrica implica que A es simétrica.

Debo probar que $A = A^t$.

Veamos:

1) Sea f la forma bilineal simétrica asociada a la matriz A.

f es simétrica $\Longleftrightarrow$ $f(X,Y)=f(Y,X)$

$\Longleftrightarrow$ ${}^tX\cdot A \cdot Y = {}^tY \cdot A \cdot X$

2) Como ${}^tX\cdot A\cdot Y$ es simétrica, entonces es igual a su transpuesta. Esto es:

$${}^tY\cdot A\cdot X = {}^t({}^tY\cdot A\cdot X) = {}^tX\cdot {}^tA\cdot Y$$

3) Sustituir (2) en (1):

$${}^tX\cdot A\cdot Y = {}^tX\cdot {}^tA\cdot Y$$

$$\Longleftrightarrow\ {}^tX\cdot A\cdot Y - {}^tX\cdot {}^tA\cdot Y = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ {}^tX\cdot (A - A^t)\cdot Y = 0\ ,\quad \forall\, X,Y \in I\!K^n$$

$$\Rightarrow\ A - A^t = 0$$

$$\Rightarrow\ A = A^t$$

($\Leftarrow$) Si $A = A^t$ debo probar que $f(X,Y) = f(Y,X)$

Veamos:

1) Se tiene $f(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$

2) Pero $A = A^t$

3) Sustituir (2) en (1): $f(X,Y) = {}^tX \cdot {}^tA \cdot Y$

$= {}^t({}^tY \cdot A \cdot X)$

$= {}^tY \cdot A \cdot X$

$= f(Y,X)$

Luego *f* es simétrica.

1.3 FORMAS CUADRÁTICAS

Definición 1.-

Sea *V* un **E.P.I.** de dimensión finita y $g : V^2 \longrightarrow I\!K$ una forma bilineal simétrica sobre *V*. Forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica *g* es la aplicación $f : V \longrightarrow I\!K$ definida por $f(X) = g(X,X) = \langle X, X \rangle$.

Si $V = I\!K^n$ y si $A \in I\!K^{n\times n}$ es una matriz simétrica de la forma bilineal *g*, entonces la forma cuadrática asociada está definida por:

$$f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Si $V = I\!R^2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

entonces: $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$

$= a_{11}\, x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$

Definición 2.-

Una forma cuadrática ${}^tX \cdot A \cdot X$ es no degenerada sí, y sólo si *A* es no singular.

* **E.P.I.** = espacio con producto interno

1.4 FORMAS CUADRÁTICAS Y CAMBIO DE BASE

Sea $f : V \longrightarrow I\!K$ una forma cuadrática caracterizada por la matriz $A \in I\!K^{n\times n}$ respecto de la base $[V] = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Se tiene entonces $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$ donde $X \in I\!K^{n\times 1}$ es la matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de *X* respecto de la base [*V*].

Si en *V* se considera otra base $[V']$, entonces $X = P \cdot X'$, donde *P* es la matriz de pasaje de la base $[V']$ a la base $[V]$.

Sustituyendo $X = P \cdot X'$ en $f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X$

obtenemos $f(X) = {}^t(P \cdot X') \cdot A \cdot (P \cdot X')$

$= {}^tX' \cdot ({}^tP \cdot A \cdot P)\, X'$

$= {}^tX' \cdot B \cdot X'$

La matriz de *f* respecto de la nueva base es: $B = {}^tP \cdot A \cdot P$. Las matrices *A* y *B* se llaman CONGRUENTES.

Definición.-

$A \in I\!K^{n\times n}$ es congruente a $B \in I\!K^{n\times n}$ sí, y sólo si existe *P* no singular tal que $B = {}^tP \cdot A \cdot P$.

1.5 APLICACIONES GEOMÉTRICAS DEL TEOREMA ESPECTRAL REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Sea en $I\!R^n$ un lugar geométrico de puntos *X* tales que satisfacen la ecuación:

${}^tX \cdot A \cdot X + 2b \cdot X + c = 0$ .... (1)

donde: $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$A = [a_{ij}] \in I\!R^{n\times n}$ es una matriz simétrica.

$b = [b_1, \ldots, b_n] \in I\!R^{1\times n}$ es un vector fila, $c \in I\!R$

La ecuación (1) es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\sum b_i\, x_i + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

El término ${}^tX \cdot A \cdot X$ se llama cuadrático y $b \cdot X$, término lineal.

Por el corolario ... (que es una consecuencia del teorema espectral) existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal real $D(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ de valores propios de A tal que:

$$P^{-1}AP = D(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \quad , \quad \lambda_i \in I\!R$$

La matriz P se obtiene del siguiente modo:

1° Se hallan los valores propios de A resolviendo la ecuación $f(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$

2° Para cada valor propio λ_i se halla una base del espacio propio.

$V(\lambda_i)=\{X \in V \,/\, AX=\lambda_i x\}$ y cumple $V(\lambda_i)\perp V(\lambda_j)$, $i\neq j$.

3° Por el método de Gram-Schmidt, la base de cada subespacio $V(\lambda_i)$ se ortonormaliza.

4° La reunión de estas bases ortonormales es la base ortonormal de $I\!R^{n\times 1}$.

5° Supongamos que $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ es la base ortonormal de $I\!R^{n\times 1}$, entonces $b_1, b_2,\ldots,b_n$ son los vectores columna de la matriz $P=[b_1\, b_2 \ldots b_n]$

La reducción de la ecuación (1) a la forma canónica, se efectúa del siguiente modo:

1. Si la ecuación ${}^tV\cdot A+b=0$ admite solución para $V=\begin{bmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{bmatrix}$ entonces afirmamos que el ***lugar geométrico tiene centro*** y la ecuación (1) se reduce a la forma canónica $\lambda_1 x_1^2+\ldots+\lambda_r x_r^2 = c$ mediante dos pasos.

a) Efectuando una traslación al centro, mediante la transformación $X=V+Y$ se eliminan los términos lineales.

b) Aplicando el cambio **ORTOGONAL** $Y=P\cdot Z$ de coordenadas se eliminan los términos cruzados obteniéndose la ecuación reducida: $\lambda_1 x_1^2+\ldots\ldots+\lambda_r x_r^2+c=0$

2. Si la ecuación ${}^tV\cdot A+b=0$ ***no admite solución*** para V, entonces haciendo el cambio ortogonal $X=P\cdot Y$ se reduce la ecuación (1) a la forma:

$${}^tY\cdot D\cdot Y+2\cdot e\cdot y+c=0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i+c=0 \;,\; \lambda_i\neq 0 \;,\; \beta_i\neq 0 \;,\; 1<r<n$$

donde: $\quad e=b\cdot P$

$$D={}^tP\cdot A\cdot P=diag(\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_n)$$

1.6 EN $I\!R^2$ REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA CURVA DE SEGUNDO GRADO A LA FORMA CANÓNICA.

Sea en $I\!R^2$ un lugar geométrico de puntos (x,y) tales que satisfacen la ecuación:

$${}^tX\cdot A\cdot X+2bX+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde: $\quad X={}^t(x,y)=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$ es simétrica.

$$b=[b_1 \;\; b_2] \quad ; \quad c\in I\!R$$

La ecuación (1) es equivalente a:

$$a_{11}x^2+2a_{12}x\,y+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

1. Hallemos los valores propios de A.

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$f(\lambda)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

$$=\lambda^2-(\text{tr}\,A)\lambda+\det A \quad , \quad \text{tr}\,A = \textbf{TRAZA DE } A$$

Si λ_1, λ_2 son las raíces de $f(\lambda)$, se cumplen: $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}\\ \lambda_1\lambda_2=\det A=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2\end{cases}$

El discriminante es: $\Delta=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2$

2. Supongamos que λ_1, λ_2 son los valores propios de A y P la matriz ortogonal, tal que $P^{-1}AP=D(\lambda_1,\lambda_2)$.

Haciendo el cambio ortogonal $X=P\cdot Y$, la ecuación (1) se reduce a la forma:

$${}^t(P\cdot Y)A(PY)+2b\cdot(P\cdot Y)+c=0$$

$${}^tY({}^tP\cdot A\cdot P)Y+2(b\cdot P)Y+c=0$$

$${}^tY\cdot D\cdot Y+2\cdot e\cdot Y+c=0$$

$$\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\, y_i^2+2\sum_{i=1}^{2}\beta_i y_i+c=0$$

$$\boxed{\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+2\beta_1 y_1+2\beta_2 y_2+c=0} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

donde: $\begin{cases} {}^tP\cdot A\cdot P=D=diag(\lambda_1,\lambda_2) \\ b\cdot P=e \\ {}^tY\cdot D\cdot Y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, y_i^2 \end{cases}$

3. Tratemos, ahora de eliminar el término lineal $\sum\beta_i\, y_i$.

Si en la ecuación (3) completamos cuadrados con respecto a las variables y_i obtenemos:

$$\lambda_1 y_1^2+2\beta_1 y_1+\dots\dots+\lambda_2 y_2^2+2\beta_2 y_2+\dots\dots+c=0$$

$$\lambda_1\left(y_1^2+\frac{2\beta_1}{\lambda_1}y+\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}\right)+\lambda_2\left(y_2^2+\frac{2\beta_2}{\lambda_2}y+\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}\right)+c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=0$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{\beta_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{\beta_2}{\lambda_2}\right)^2+c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=0$$

haciendo $\begin{cases} y_1+\frac{\beta_1}{\lambda_1}=x' \\ y_2+\frac{\beta_2}{\lambda_2}=y' \\ c-\frac{\beta_1^2}{\lambda_1^2}-\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2}=c' \end{cases}$, **centro** $=\left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1},-\frac{\beta_2}{\lambda_2}\right)$

obtenemos: $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$

4. Las formas cónicas en $I\!R^2$ son:

Caso 1. Si $\det A=\lambda_1\,\lambda_2\neq 0$, la cónica tiene centro y se reduce a la forma:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Si $\lambda_1\lambda_2>0$ y :

a$_1$) $\lambda_1\cdot c'<0$, entonces la ecuación (4) es una ***elipse.***

a$_2$) $c'=0$, la ecuación (4) se reduce a un punto o dos rectas secantes imaginarias.

a$_3$) $\lambda_1\cdot c'>0$, la ecuación (4) es un conjunto vacío.

Si $\lambda_1\,\lambda_2<0$ y :

a$_4$) $c'\neq 0$, entonces, la ecuación (4) es una ***hipérbola.***

a$_5$) $c'=0$, la ecuación (4) son dos rectas secantes.

Caso 2. Si $\det A=\lambda_1\lambda_2=0$, la cónica no tiene centro y

a$_6$) Si $\lambda_1\lambda_2=0 \Longleftrightarrow \lambda_1=0 \vee \lambda_2=0$, entonces la ecuación (3) es una de las siguientes parábolas: $\boxed{\lambda_1 x^2+2\beta_1 x+2\beta_2 y+c=0}$ (3.1) $\vee$ $\lambda_2 y^2+2\beta_1 x+2\beta_2 y+c=0$

a$_7$) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \;\wedge\; \lambda_1 c<0$, entonces: $\lambda_1 x^2+c=0$ son dos rectas paralelas.

a$_8$) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \;\wedge\; \lambda_1 c>0$, entonces: $\lambda_1 x^2+c=0$ es un conjunto vacío o dos rectas imaginarias paralelas.

a$_9$) En (3.1) si $[\beta_1,\beta_2]=0 \;\wedge\; c=0$, entonces: $\lambda_1 x^2=0$, $\lambda_1\neq 0$ es la recta $x=0$.

EJEMPLOS EN $I\!R^2$

Ejemplo 01.-

La ecuación: $4x^2-24xy+11y^2+56x-58y-5=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$

define una cónica. Reducir a la forma canónica y determinar la forma de la cónica.

Solución:

Se tiene: $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}4 & -12\\-12 & 11\end{bmatrix}$, $b=[28,-29]$, $c=-5$ siempre que la ecuación (1) está expresada en la forma: ${}^tX\cdot A\cdot X+2b\cdot X+c=0$. Hallemos su forma canónica.

Hallemos su forma canónica:

Paso 1. Veamos si tiene centro.

Planteamos la ecuación: ${}^tV\cdot A+b=0$, $V=\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$

Obtenemos el sistema $\begin{cases}4h-12k=-28\\-12h+11k=29\end{cases}$

La solución es $\begin{cases}h=-\frac{2}{5}\\k=\frac{11}{5}\end{cases}$

Paso 2. Hacer la traslación: $X=V+Y$

$$\begin{cases}x=-\frac{2}{5}+x'\\y=\frac{11}{5}+y'\end{cases}$$

Sustituir en (1):

$$4\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)^2-24\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)+11\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)^2+56\left(-\tfrac{2}{5}+x'\right)-58\left(\tfrac{11}{5}+y'\right)-5=0$$

$$\Longleftrightarrow 4x'^2+11y'^2-24x'y'-80\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Paso 3. Diagonalizar la matriz A, hallando la matriz ortogonal P.

1° Hallar los valores propios de A.

$$A=\begin{vmatrix}4&-12\\-12&11\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}\to \operatorname{tr} A=4+11=15\\ \to \det A=44-144=-100\end{matrix}$$

Resolver la ecuación: $\lambda^2-15\lambda-100=0$

$(\lambda-20)(\lambda+5)=0$

$\lambda=20 \ \vee\ \lambda=-5$

2° Para cada valor propio hallamos el subespacio propio $V(\lambda_i)=\{X\in I\!R^2 \,/\, AX=\lambda_i X\}$ resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$(A-\lambda I)X=0$$

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1-12x_2=0\\-12x_1+(11-\lambda)x_2=0\end{cases},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

i) Si $\lambda=20$: $\begin{cases}-16x_1-12x_2=0\\-12x_1-9x_2=0\end{cases}$

Se reduce a una sola ecuación: $4x_1+3x_2=0$

$x_1=-\frac{3}{4}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}x_2\\x_2\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}x_2\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$$

Por tanto $V(20)=L\left\{\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\right\}$ es el subespacio propio generado por $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$

Una base ortonormal de $V(20)$ es $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix}\right\}$

ii) Si $\lambda_2=-5$: $\begin{cases}9x_1-12x_2=0\\-12x_1+16x_2=0\end{cases}$

Se redice a: $3x_1-4x_2=0$

$x_1=\frac{4}{3}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}x_2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

Por tanto $V(-5)=L\left\{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right\}$ es el subespacio propio generado por $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

3° Una base ortonormal de $I\!R^2$ es $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right\}$

Por tanto $P=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

Se cumple: $P^{-1}AP=D(20,-5)$, donde $P^{-1}={}^tP$

Paso 4. Mediante la transformación P y haciendo $z=P\cdot Y$ se logra la diagonalización:

$$20x^2-5y^2-80=0$$

$$4x^2-y^2-16=0$$

Se trata de una ***hipérbola***.

Ejemplo 02.- Determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación:

$$4x^2-12xy+9y^2-8\sqrt{13}x-14\sqrt{13}y+117=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Solución:

Se tiene: $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}4&-6\\-6&9\end{bmatrix}$, $b=[-4\sqrt{13},-7\sqrt{13}]$, $c=117$. Hallemos su forma canónica.

Paso 1. Veamos si tiene centro:

Planteamos la ecuación ${}^tV\cdot A+b=0$, $V=\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}$

$$4h-6k=4\sqrt{13}$$
$$-6h+9k=7\sqrt{13}$$

Como $\det A=0$, no existe centro.

Paso 2. Diagonalicemos ortogonalmente la forma cuadrática ${}^tX\cdot A\cdot X$ mediante la transformación ortogonal $X=P\cdot Y$.
Hallemos P.

1° Hallar los valores propios de A.

De $A=\begin{vmatrix}4&-6\\-6&9\end{vmatrix}$ → $\operatorname{tr}A=4+9=13$; $\det A=36-36=0$

Al resolver la ecuación: $\lambda^2-13\lambda=0$

obtenemos $\lambda(\lambda-13)=0 \iff \lambda=0 \ \vee\ \lambda=13$

2° Para cada λ_i se halla una base ortonormal del espacio propio $V(\lambda_i)=\{X\in I\!R^2 \,/\, AX=\lambda_i X\}$.

i) Si $\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases}4x_1-6x_2=0\\-6x_1+9x_2=0\end{cases}$

Se reduce a: $x_1=\frac{3}{2}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}x_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$. Una base ortonormal de $V(0)=\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\right\}$

ii) Si $\lambda=13 \Rightarrow \begin{cases}-9x_1-6x_2=0\\-6x_1-4x_2=0\end{cases}$

Se reduce a: $x_1=-\frac{2}{3}x_2$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{3}x_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

Una base ortonormal de $V(13)=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\right\}$

3° Por tanto: $P=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}&-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}$

4° Hallar $2e\cdot Y$
Donde $e=b\cdot P$

$$e=[-4\sqrt{13},-7\sqrt{13}]\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}&-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}=[-26,-13]$$

Luego: $2e\cdot Y=2[-26,-13][y_1,y_2]$

$$2e\cdot Y=-52y_1-26y_2$$

5° La ecuación (1) se convierte en la forma:

$${}^tY\cdot D\cdot Y+2e\cdot Y+117=0$$
$$13y_2^2-52y_1-26y_2+117=0$$
$$13(y_2^2-2y_2+1)-52\left(y_1-\tfrac{117}{52}\right)=0$$
$$13(y_2-1)^2-52\left(y_1-\tfrac{117}{52}\right)=0$$

Hacer $\begin{cases}y_2-1=z_2\\y_1-\frac{117}{52}=z_1\end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 13z_2^2 - 52z_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_2^2 - 4z_1 = 0$$

o $y^2 - 4x = 0$ que es una ***parábola***.

Ejemplo 03.- Reducir a la forma canónica la ecuación: $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$.

Solución:

1. **Como la ecuación: $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$ no tiene términos lineales, bastará hacer sólo la rotación, hallando los valores propios de la matriz:** $A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{bmatrix}$

2. De $A = \begin{vmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{vmatrix}$ → $\text{tr}\, A = 6 - 6 = 0$; → $\det A = -36 - \frac{25}{4} = -\frac{169}{4}$

   Resolver: $\lambda^2 - \frac{169}{4} = 0$

   $$\left(\lambda - \tfrac{13}{2}\right)\left(\lambda + \tfrac{13}{2}\right) = 0 \iff \lambda = \tfrac{13}{2} \ \vee \ \lambda = -\tfrac{13}{2}$$

3. Con los valores propios : $\lambda_1 = \frac{13}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{13}{2}$

   convierten la ecuación : $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$

   a la forma canónica : $\frac{13}{2}x'^2 - \frac{13}{2}y'^2 + 7 = 0$

   $$13y'^2 - 13x'^2 = 14$$

   $$\frac{y'^2}{\frac{14}{3}} - \frac{x'^2}{\frac{14}{3}} = 1$$ es una ***hipérbola***.

4. La base ortonormal es: $O = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} \end{bmatrix} \right\}$

   y la matriz ortogonal es: $P = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{26}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \end{bmatrix}$ que es lo que diagonaliza a la matriz A.

PROBLEMAS

En los siguientes ejercicios, rote y traslade los ejes para llevar la cónica indicada a la posición normal. Identifique la cónica y determine su ecuación con respecto al nuevo sistema de coordenadas.

01.- $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$

02.- $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

03.- $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

04.- $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

05.- $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

06.- $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$

07.- $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$

08.- $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

09.- $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

10.- $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$

Solución:

01.- $2x''^2 + y''^2 = 6$ **(elipse)**

02.- $12y''^2 - 4x''^2 = 81$ **(hipérbola)**

03.- $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ **(hipérbola)**

04.- $6x''^2 + 11y''^2 = 66$ **(elipse)**

05.- $\sqrt{29}y'^2 - 3x' = 0$ **(parábola)**

06.- $4y''^2 - x''^2 = 0$ **(dos rectas)**

07.- $y' = 2 \ , \ y' = -2$

08.- $2y'^2 - 3x'^2 = 8$ **(hipérbola)**

09.- $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$ **(parábola)**

10.- $7x'^2 + 3y'^2 = 9$ **(elipse)**

1.7 EN $\mathbb{R}^3$
ESTUDIO DE LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA SUPERFICIE DE SEGUNDO GRADO

Supongamos que en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$, se tiene la ecuación:

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Haciendo el cambio ortogonal $X = P\cdot Y$, donde P es la matriz ortogonal cuyos vectores columnas son los vectores propios ortonormalizados, la ecuación (1) se reduce a la forma:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2b_1x'+2b_2y'+2b_3z'+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

donde λ_1, λ_2, λ_3 son los vectores propios de la matriz A.

Se pueden dar tres casos:
I. Todos los λ_i son diferentes de cero.
II. Uno de los valores de λ_i es igual a cero.
III. Dos de los valores de λ_i son igual a cero.

CASO I.- Si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$, la ecuación (2) tiene centro y completando cuadrados se convierte en:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'+\frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2+c=0$$

El centro es: $\left(-\frac{b_1}{\lambda_1},-\frac{b_2}{\lambda_2},-\frac{b_3}{\lambda_3}\right)$

Haciendo la traslación paralela de los ejes coordenados: $x'+\frac{b_1}{\lambda_1}=x''$; $y'+\frac{b_2}{\lambda_2}y''=y''$;

$z'+\frac{b_3}{\lambda_3}=z''$, obtenemos: $\boxed{\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2+c=0}$

Esta es la ecuación de una superficie de segundo grado con centro.

Si $c<0$, se pueden dar 4 casos:

01. $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$ (un elipsoide)

02. $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3<0$ (un hiperboloide de una hoja)

03. $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$ (un hiperboloide de dos hojas)

04. $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$ (un conjunto vacío o elipsoide imaginario)

05. Si $c=0$ y todos los λ_i son del mismo signo, se tiene un punto (un cono imaginario)

06. Si $c=0$ y los λ_i tienen signos diferentes, resulta un cono.

CASO II. Uno de los coeficientes λ_i es cero.

Supongamos que, por ejemplo $\lambda_3=0$. Realizando la traslación correspondiente del origen de coordenadas, podemos reducir la ecuación de la superficie a la forma:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2b_3z'+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Aquí se puede dar los casos $b_3=0 \ \vee \ b_3\neq 0$

Si $\boxed{b_3=0}$, la ecuación es:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+b=0 \qquad (\lambda_1>0,\lambda_2>0,b<0)$$

07. $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=-b$ (Cilindro elíptico)

08. $\lambda_1x'^2-\lambda_2y'^2=-b$ (Cilindro hiperbólico)

09. $-\lambda_1x'^2-\lambda_2y'^2=-b$ (Conjunto vacío, cilíndrico con generatrices imaginarias)

10. $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=0$ ($x'=0 \ \wedge \ y'=0$, recta z')

11. $\lambda_1x'^2-\lambda_2y'^2=0$ (dos rectas distintas secantes)

Si $\boxed{b_3\neq 0}$ la ecuación (4) se reduce a la forma:

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+2b_3z''=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

12. Si $\lambda_1\lambda_2>0$ se tiene un paraboloide elíptico.

13. Si $\lambda_1\lambda_2<0$ se tiene un paraboloide hiperbólico.

CASO III. Dos de los números λ_i son iguales a cero.

Supongamos que $\lambda_2=0 \ \wedge \ \lambda_3=0$, la ecuación (1) se reduce a la forma:

$$\lambda_1x'^2+2b_2y'+2b_3z'+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si $b_2=0 \ \wedge \ b_3=0$, entonces se reduce a la forma: $\lambda_1x'^2+b=0$

14. Para $\lambda_1b<0$, entonces $\lambda_1x'^2+b=0$ son dos planos paralelos.

15. Para $\lambda_1b>0$, entonces $\lambda_1x'^2+b=0$ es un conjunto vacío o dos planos paralelos imaginarios.

16. Si $b=0$, entonces $\lambda_1x'^2=0$ es el plano $x'=0$.

17. Si al menos uno de los coeficientes b_2, b_3 es diferente de cero en la ecuación (6) hacemos el cambio:

$x' = x''$, $y' = \dfrac{b_2 y'' + b_3 z''}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}$, $z' = \dfrac{b_3 y'' - b_2 z''}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}$

transformándose en: $\lambda_1 x'' + 2\sqrt{b_2^2 + b_3^2} + y'' + b = 0$

Haciendo una transformación de coordenadas, se convierte en:

$\lambda_1 x'''^2 + 2\sqrt{b_2^2 + b_3^2}\; y''' + b = 0$ que es un cilindro parabólico.

8.11 EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 01.-

Caso 1. $\lambda_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1,2,3$

La ecuación $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 28y - 8z - 5 = 0$ ....(1) define una superficie cuadrática. Reducir a la forma canónica y determinar la forma de la superficie.

Solución:

Tenemos: $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $b = [-11, 14, -4]$, $c = -5$

Hallemos su forma canónica.

Paso 1. Veamos si tiene centro.

Planteamos la ecuación ${}^tV \cdot A + b = 0$

$$[v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} + [-11, 14, -4] = 0$$

$$\begin{cases} 7v_1 - 2v_2 \qquad\quad - 11 = 0 \\ -2v_1 + 6v_2 - 2v_3 + 14 = 0 \\ \qquad -2v_2 + 5v_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema lineal correspondiente obtenemos la solución ${}^tV = [1, -2, 0]$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2. Haciendo la traslación $X = V + Y$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x = 1 + x' \\ y = -2 + y' \\ z = 0 + z' \end{cases}$$

Obtenemos:

$7(x'+1)^2 + 6(y'-2)^2 + 5z'^2 - 4(x'+1)(y'-2) - 4(y'-2)(z') - 22(x'+1)$
$+ 28(y'-2) - 8z' - 5 = 0$

$7x'^2 + 6y'^2 + 5z'^2 - 4x'y' - 4y'z' - 44 = 0$ .... (2)

Paso 3. Diagonalizar la matriz A, hallando la matriz ortogonal P.

1° Se hallan los valores propios de A, resolviendo la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0$$

$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 6$
$\lambda_3 = 9$

2° Para cada λ_i se halla una base del espacio propio $V(\lambda) = \{ X \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,/\, AX = \lambda_i X \}$

Para ello, resolver la ecuación $AX - \lambda_i X = 0$

$(A - \lambda_i I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda_i & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (7-\lambda_i)x_1 \quad - 2x_2 \qquad\qquad = 0 \\ -2x_1 + (6-\lambda_i)x_2 \quad - 2x_3 = 0 \\ \qquad\quad -2x_2 + (5-\lambda_i)x_3 = 0 \end{cases}$$

i) Si $\lambda_1 = 3$, en (I) resolver $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Por tanto: $V(3) = L\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y una base ortonormal de $V(3)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$

ii) Si $\lambda_2 = 6$ en (I) resolver

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Luego: $X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Por tanto $V(6) = L\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

Una base ortonormal de $V(6)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$

iii) Si $\lambda_3 = 9$ en (I)

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_3 = -2x_3 \end{cases}$$

Luego: $X = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por tanto: $V(9) = L\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y una base ortonormal de $V(9)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$.

3° Una base ortonormal de $I\!R^{3\times 1}$ es $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$

Por tanto, la matriz P es: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Se cumple: $P^{-1} \cdot A \cdot P = D(3,6,9)$

<u>Paso 4</u>. Haciendo $Z = P \cdot Y$ la ecuación (2) se diagonaliza:

$$3z_1^2 + 6z_2^2 + 9z_3^2 - 44 = 0$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 = 44$$

$$\frac{x^2}{\frac{44}{3}} + \frac{y^2}{\frac{44}{6}} + \frac{z^2}{\frac{44}{9}} = 1$$

Se trata de una ***elipsoide***.

Ejemplo 02.-

Dada la ecuación: $x^2+2y^2+3z^2+2\sqrt{2}xy-12z+2=0$ .... (1)

Reducir a la forma canónica y determinar la forma de la superficie.

Solución:

Tenemos: $A=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $b=[0,0,-6]$, $c=2$

Paso 1. Veamos si tiene centro.

Planteamos la ecuación ${}^tV\cdot A+b=0$

$$\begin{cases} v_1+\sqrt{2}v_2 = 0\\ \sqrt{2}v_1+2v_2 = 0\\ 3v_3=6\end{cases}$$

Resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{cccc|c} (-\sqrt{2})\ \textcircled{1} & \sqrt{2} & 0 & & 0\\ \to\sqrt{2} & 2 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 3 & & 6\\ \hline 1 & \sqrt{2} & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 0 & & 0\\ \text{por } \frac{1}{3}\to 0 & 0 & 3 & & 6\\ \hline 1 & \sqrt{2} & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 2 \end{array}$$

Rango de Matriz de coef. = 2.

Rango de Matriz ampliada = 2

Son iguales los rangos, por tanto, el sistema es compatible.

Como el número de incógnitas es mayor que el rango, entonces existe infinidad de soluciones.

$$x_1=-\sqrt{2}\,x_2$$
$$x_2=x_2$$
$$x_3=2$$

Paso 2. Hallar la matriz P para diagonalizar A.

1° Hallar los valores propios de A.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(3-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-2]=0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2=0$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=\lambda_3=3$$

2° Para cada λ_i hallar una base ortonormal resolviendo el sistema:

$$(A-\lambda_i I)X=0$$

$$\text{(I)}\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + 0\,x_3=0\\ \sqrt{2}\,x_1+(2-\lambda)x_2+0\,x_3=0\\ 0\,x_1+0\,x_2+(3-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

i) Si $\lambda=0$, en (I) resolver:

$$\begin{cases}x_1+\sqrt{2}\,x_2 = 0\\ \sqrt{2}\,x_1+2x_2=0\\ +3x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=-\sqrt{2}\,x_2\\ x_3=0\end{cases}$$

Luego: $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\,x_2\\x_2\\0\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\1\\0\end{bmatrix}$

Por tanto: $V(0)=L\left\{\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Una base ortonormal de $V(0)$ es $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

ii) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ en (I):

$$\begin{cases} -2x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + 0x_3 = 0 \\ \sqrt{2}\,x_1 - \quad x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + \quad 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + \sqrt{2}\,x_2 = 0 \\ \sqrt{2}\,x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ -x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 = 0 \right.$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_2$$

Luego: $X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Una base de $V(3)$ es $V(3) = \left\{ \underset{u_1}{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$

Al ortonormalizar esta base por el método de Gram-Schmidt, se obtiene:

$$b_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{(\sqrt{2}/2\,,1\,,0)}{\sqrt{3/2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,0\right)$$

$$z_2 = u_2 - \langle u_2\,,b_1 \rangle\, b_1$$

$$= (0,0,1) - \left\langle (0,0,1)\,,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,0\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,,0\right)$$

$$= (0,0,1)$$

$$b_2 = \frac{z_2}{|z_2|} = (0,0,1)$$

Por tanto, una base ortonormal de $V(3)$ es: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

La matriz buscada es $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se cumple: $P^{-1}A \cdot P = D(0,3,3)$

<u>Paso 3.</u> Haciendo el cambio ortogonal $X = P \cdot Y$ se reduce la ecuación (1) a la forma:

$${}^{t}Y \cdot D \cdot Y + 2e \cdot Y + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Donde: ${}^{t}Y \cdot D \cdot Y = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, y_i^2$

$$2e \cdot Y = 2[0,0,-6] \cdot [y_1, y_2, y_3] = -12y_3$$

$$e = b \cdot P$$

$$= [0\ 0\ -6] \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ -6]$$

La ecuación (2) se transforma en:

$$3y_2^2 + 3y_3^2 - 12y_3 + 2 = 0$$

$$3y_2^2 + 3(y_3^2 - 4y_3 + \ldots\ldots) + 2 = 0$$

$$3y_2^2 + 3(y_3^2 - 4y_3 + 4) + 2 - 12 = 0$$

$$3y_2^2 + 3(y_3 - 2)^2 - 10 = 0$$

Hacer: $\begin{cases} y_2 = z_2 \\ y_3 - 2 = z_3 \end{cases}$

Obteniéndose: $3z_2^2 + 3z_3^2 - 10 = 0$

$$z_2^2 + z_3^2 = \frac{10}{3} \quad \text{(cilindro circular)}$$

PROBLEMAS

01. Para cada caso, encuentre una matriz **ORTOGONAL** que diagonalice la matriz simétrica dada:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

02. En los ejercicios siguientes, encuentre una matriz P que diagonalice ortogonalmente a A y determine $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{9\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 3 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \frac{30}{18} & -\frac{12}{18} & 0 & -\frac{12}{18} \\ -\frac{12}{18} & -\frac{15}{18} & 0 & \frac{3}{18} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{12}{18} & \frac{3}{18} & 0 & -\frac{15}{18} \end{bmatrix}$

Solución:

a) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}=P$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$

b) $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d) $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

03. Para cada caso, determine el conjunto de ecuaciones de traslación que conviertan la cuadrática a la posición normal. Identifique la ecuación cuadrática:

a) $9x^2+36y^2+4z^2-18x-144y-24z+153=0$

b) $6x^2+3y^2-2z^2+12x-18y-8z=-7$

c) $3x^2-3y^2-z^2+42x+144=0$

d) $4x^2+9y^2-z^2-54y-50z=544$

e) $x^2+16y^2+2x-32y-16z-15=0$

f) $7x^2-3y^2+126x+72y+z+135=0$

g) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=11$

Solución:

a) $9x'^2+36y'^2+4z'^2=36$, elipsoide

b) $6x'^2+3y'^2-2z'^2=18$, hiperboloide de una hoja

c) $3x'^2-3y'^2-z'^2=3$, hiperboloide de dos hojas

d) $4x'^2+9y'^2-z'^2=0$, cono elíptico

e) $x'^2+16y'^2-16z'=32$, hiperboloide de una hoja

f) $7x'^2-3y'^2+z'=0$, paraboloide hiperbólica

g) $x'^2+y'^2+z'^2=25$, esfera.

04. Trasladando y/o rotando identifique cada una de los siguientes lugares geométricos:

a) $2x^2+3y^2+23z^2+7xy+150=0$

b) $4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-5=0$

c) $144x^2+100y^2+81z^2-216xz-540x-720z=0$

d) $2xy+z=0$

e) $2xy+2xz+2yz-6z-6y-4z=-9$

f) $7x^2+7y^2+10z^2-2xy-4xz+4yz-12x+12y+60z=24$

g) $2xy-6y+10y+z-31=0$

h) $2x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz+2yz+10x-26y-2z=0$

Solución:

a) $25x'^2-3y'^2-50z'^2-150=0$, hiperboloide de dos hojas

b) $2x'^2+2y'^2+8z'^2-5=0$, elipsoide

c) $9x'^2+4y'^2-36z=0$, paraboloide elíptico

d) $x'^2-y'^2+z'=0$, paraboloide elíptico

e) $2x''^2-y''^2-z''^2=1$, hiperboloide de dos hojas

f) $x''^2+y''^2+2z''^2=4$, elipsoide

g) $x''^2-y''^2+z''=0$, paraboloide hiperbólico

h) $6x''^2+3y''^2-8\sqrt{2}\,z''=0$, paraboloide elíptico

2. LA EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

2.1 La función exponencial e^x se define como la serie convergente.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots \qquad (x\in I\!R)$$

De manera similar si A es una matriz cuadrada de orden $n\times n$ en $I\!R$, la exponencial e^A se define como la serie:

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\ldots+\frac{1}{m!}A^m+\ldots \qquad (A\in I\!R^{n\times n})$$

La exponencial e^{At}, donde $t\in I\!R$ se define como la serie:

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}=I+tA+\frac{1}{2!}(tA)^2+\ldots+\frac{1}{m!}(At)^m+\ldots,\ t\in I\!R$$

PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL e^{At}

1. $e^{P^{-1}(At)P}=P^{-1}e^{At}P$, para cada matriz inversible P.

2. Si N es nilpotente de índice q, $q>1$, entonces:

$$e^{Nt}=I+Nt+\frac{1}{2!}N^2t^2+\ldots+\frac{1}{(q-1)!}N^{q-1}t^{q-1}$$

3. Si $AB=BA$, entonces $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

Demostración.-

Para demostrar la propiedad 1 necesitamos aplicar la propiedad $[P^{-1}AP]^n=P^{-1}A^nP$, para todo número natural n (se prueba por inducción).

Demostración de la Propiedad 1.

$$\begin{aligned} e^{P^{-1}(At)P} &= I+P^{-1}(At)P+\frac{1}{2!}[P^{-1}(At)P]^2+\ldots+\frac{1}{n!}[P^{-1}(At)P]^n+\ldots \\ &= I+P^{-1}(At)P+\frac{1}{2!}P^{-1}(At)^2P+\ldots+\frac{1}{n!}P^{-1}(At)^nP+\ldots \\ &= P^{-1}\underbrace{\left[I+(At)+\frac{1}{2!}(At)^2+\ldots+\frac{1}{n!}(At)\right]}_{e^{At}}P+\ldots \\ &= P^{-1}e^{At}P \end{aligned}$$

Demostración de la Propiedad 2.

Es similar a la anterior, solo recordar que $N^q = 0$

♦ La demostración de la propiedad 3, no es fácil (investigue).

3. APLICACIONES DE LA MATRIZ EXPONENCIAL

Dada una matriz cuadrada 2×2 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$. La forma de la matriz canónica $\overline{A}$ dependerá de los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz A.

Hay tres casos:

CASO 1

1.1 $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$, cuando λ_1 y λ_2 son los valores propios de A ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in I\!R$)

1.2 $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, cuando $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ($\lambda \in I\!R$) y la dimensión del subespacio generado por λ es dos.

CASO 2

$\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$, cuando $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ($\lambda \in I\!R$) y la dimensión del subespacio generado por λ es uno.

CASO 3

$\overline{A}=\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ $\alpha, \beta \in I\!R$, $\beta > 0$; cuando los valores propios de A son los números complejos: $\alpha \pm i\beta$

En cada caso: $\overline{A} = C^{-1}AC$, donde $C = [U|V]$ es una matriz no singular, siendo U y V los vectores propios de A dispuestos en columna.

A continuación veremos la forma matricial de la exponencial $e^{t\overline{A}}$, para el caso continuo ($t \in I\!R$) y para el caso discreto ($t = 1, 2, 3, \ldots$).

CASO CONTINUO ($t \in I\!R$)

CASO 1

1.1 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ entonces $e^{t\overline{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$

1.2 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ entonces $e^{t\overline{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

CASO 2

Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$ entonces $e^{t\overline{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t}\end{bmatrix} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1\end{bmatrix}$

CASO 3

Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ entonces $e^{t\overline{A}} = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -sen(\beta t) \\ sen(\beta t) & \cos(\beta t)\end{bmatrix}$

donde $\begin{cases} \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\ldots \\ sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots \end{cases}$

CASO DISCRETO $t = 1, 2, 3, \ldots$

CASO 1

1.1 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$, entonces $\overline{A}^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t\end{bmatrix}$

1.2 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, entonces $\overline{A}^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \lambda^t\end{bmatrix}$

CASO 2 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$, entonces $\overline{A}^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 \\ t\lambda^{t-1} & \lambda^t\end{bmatrix}$

CASO 3 Si $\overline{A}=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$, entonces $\overline{A}^t=\rho^t\begin{bmatrix}cos(\theta t) & -sen(\theta t)\\ sen(\theta t) & cos(\theta t)\end{bmatrix}$

$$z=\alpha+i\beta\quad \beta>0$$

$$\rho=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\begin{cases}\alpha=\rho\cos\theta\\ \beta=\rho\,sen\,\theta\end{cases}$$

Demostración de caso 1.1 (para *t* continuo)

Si $\overline{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$, entonces:

$$e^{t\overline{A}}=I+t\overline{A}+\tfrac{1}{2!}(t\overline{A})^2+\ldots+\tfrac{1}{n!}(t\overline{A})^n+\ldots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\lambda_1 & 0\\ 0 & t\lambda_2\end{bmatrix}+\tfrac{1}{2!}\begin{bmatrix}t^2\lambda_1^2 & 0\\ 0 & t^2\lambda_2^2\end{bmatrix}+\ldots+\tfrac{1}{n!}\begin{bmatrix}t^n\lambda_1^n & 0\\ 0 & t^n\lambda_2^n\end{bmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{bmatrix}1+t\lambda_1+\frac{1}{2!}(t\lambda_1)^2+\ldots & \\ 0 & 1+t\lambda_2+\frac{1}{2!}(t\lambda_2)^2+\ldots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

De manera similar se demuestran los casos 1.2 , 2 y 3.

Los casos 1.1, 1.2, 2 y 3 para $t=1,2,3,\ldots$; se demuestran por inducción.

4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES POR REDUCCIÓN A FORMA CANÓNICA PARA DOS INCÓGNITAS.

Un sistema dinámico lineal con dos funciones incógnitas $x(t)$ y $y(t)$, que dependen de la variable tiempo "t", se pueden presentar planteadas para tiempo continuo o para tiempo discreto.

El sistema en tiempo continuo tiene la forma:

$$\text{(I)}\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx+dy\end{cases}$$

donde: $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$

Expresado matricialmente es:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\dot{X}=AX$$

Debemos hallar X

El sistema de tiempo discreto, tiene la forma:

$$\text{(II)}\begin{cases}x_{t+1}=ax_t+by_t\\ y_{t+1}=cx_t+dy_t\end{cases}$$

donde:

x_{t+1} expresa que la función *x* en el período "$t+1$" depende del comportamiento de las funciones "*x*" y "*y*" en el período "*t*".

"lo que ocurrirá mañana depende de lo que ocurrió hoy".

Expresado matricialmente es:

$$\begin{bmatrix}x_{t+1}\\ y_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix}$$

$$X_{t+1}=AX_t$$

Debemos hallar X_t

Para encontrar la solución del sistema, necesitamos:

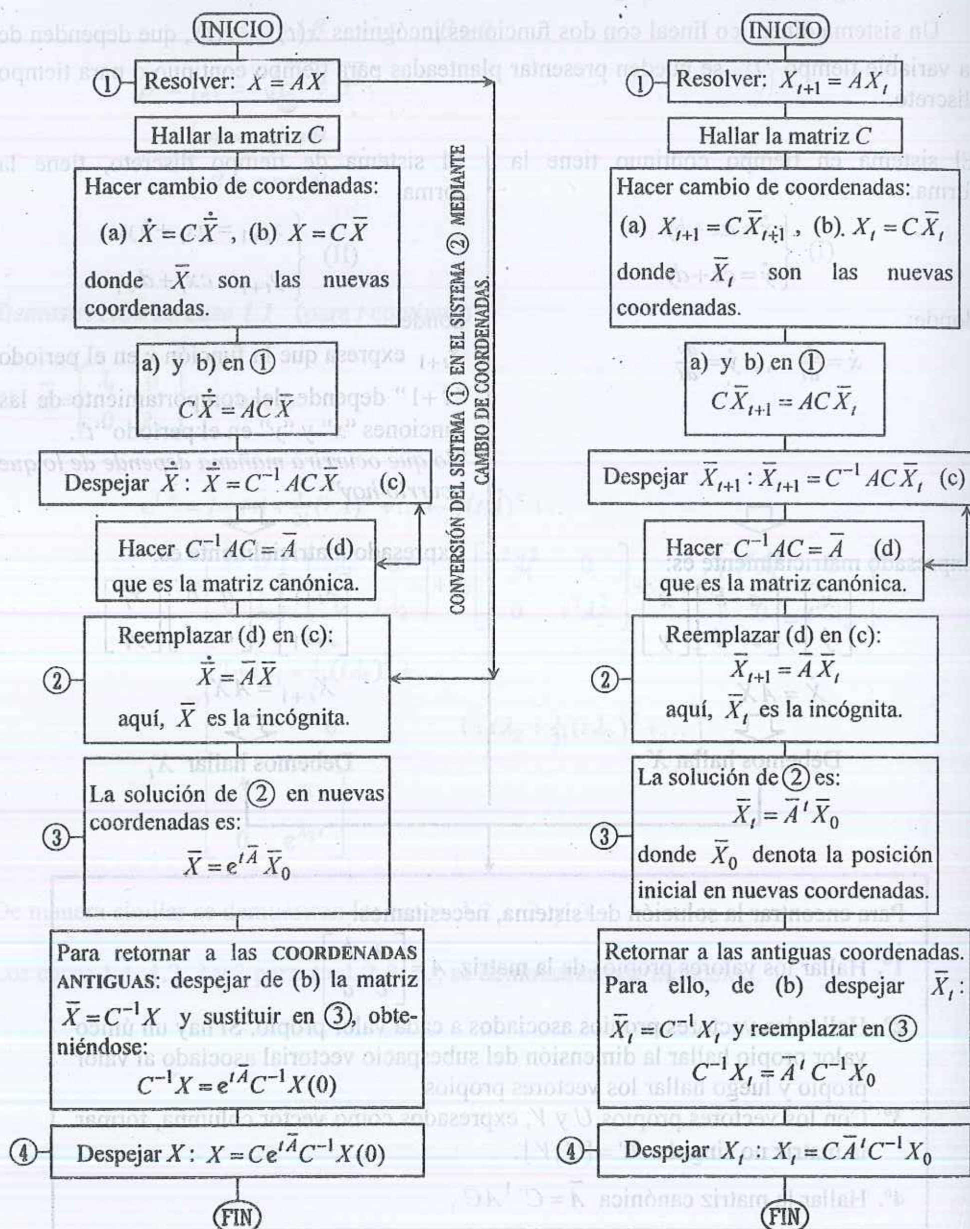
1º. Hallar los valores propios de la matriz $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

2º. Hallar los vectores propios asociados a cada valor propio. Si hay un único valor propio hallar la dimensión del subespacio vectorial asociado al valor propio y luego hallar los vectores propios.

3º. Con los vectores propios U y V, expresados como vector columna, formar la matriz no singular $C=[U\,|\,V]$.

4º. Hallar la matriz canónica $\overline{A}=C^{-1}AC$.

RESOLUCIÓN MATRICIAL DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS I Y II



SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES EN TIEMPO CONTINUO

Ejemplo 01 (Caso 1: los valores propios de la matriz A son reales y diferentes)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x + 7y - 2$$

Se pide hallar:

a) La solución complementaria.
b) La solución particular.
c) La solución general, siendo las condiciones iniciales.

$$X(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-15+\sqrt{19}}{5} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolución:

El sistema en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} \;=\; AX \;+\; b$$

a) **SOLUCIÓN COMPLEMENTARIA.**

Se obtiene de resolver: $\dot{X} = AX$

A) La solución en **COORDENADAS NUEVAS** es: $\bar{X}(t) = e^{t\bar{A}}\bar{X}(0)$

Necesitamos hallar........:
- Los valores de A y los vectores propios
- La matriz canónica $\bar{A}$.
- La matriz exponencial $e^{t\bar{A}}$.

Veamos:

De $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ → $tr\,A = 1 + 7 = 8$, $|A| = 7 - 10 = -3$

Polinomio característico = 0

$$\lambda^2 - (tr\,A)\lambda + |A| = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 4 - \sqrt{19},\quad \lambda_2 = 4 + \sqrt{19}$$

- El vector propio asociado a λ_1 es:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{(3+\sqrt{19})}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- El vector propio asociado a λ_2 es:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{(3-\sqrt{19})}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- La matriz de cambio de coordenadas es:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{(3+\sqrt{19})}{5} & -\frac{(3-\sqrt{19})}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- La inversa de C es:

$$C^{-1} = -\frac{5}{2\sqrt{19}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{(3-\sqrt{19})}{5} \\ -1 & -\frac{(3+\sqrt{19})}{5} \end{bmatrix}.$$

- La matriz exponencial es:

$$e^{t\bar{A}} = \begin{bmatrix} e^{(5-\sqrt{19})t} & 0 \\ 0 & e^{(4+\sqrt{19})t} \end{bmatrix}.$$

- Por tanto, la solución en nuevas coordenadas nueva es:

$$\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{(4-\sqrt{19})t} & 0 \\ 0 & e^{(4+\sqrt{19})t} \end{bmatrix}$$

B) La solución complementaria en coordenadas antiguas es:

$$X(t) = Ce^{t\bar{A}}C^{-1}X(0)$$

donde: $C e^{t\bar{A}} = e^{\lambda_1 t}U + e^{\lambda_2 t}V$

$$C^{-1}X(0) = \bar{X}(0) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces: $X(t) = \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t}U + \bar{h}_2 e^{\lambda_2 t}V$

$$X(t) = 2e^{(4-\sqrt{19})t}\begin{bmatrix} -(3+\sqrt{19}) \\ 1 \end{bmatrix} + 3e^{(4+\sqrt{19})t}\begin{bmatrix} -\frac{(3-\sqrt{19})}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) **SOLUCIÓN PARTICULAR.**

Suponer que la solución particular es:

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} \ , & \bar{x} \text{ constante} \\ y(t) = \bar{y} \ , & \bar{y} \text{ constante} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

Sustituir en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \bar{x} + 2\bar{y} - 1 \\ 0 = 5\bar{x} + 7\bar{y} - 2 \end{cases}$$

Al resolver, obtenemos $\begin{cases} \bar{x} = -1 \\ \bar{y} = 1 \end{cases}$

La solución particular es $X_P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

C) La solución general es la suma de la solución complementaria con la solución particular.

$$X(t) = X_c(t) + X_P$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 02

(Caso 2: La **matriz** A **tiene un único valor** propio "λ" y $\dim(S_\lambda) = 1$)

Resolver el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -\frac{1}{4}x + y \end{cases}$

Resolución:

- La matriz del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \to tr\,A = 2+1 = 3 \\ \to |A| = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \end{matrix}$$

- Polinomio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2$$

- Único valor propio $\lambda = \frac{3}{2}$.
- Vector propio asociado a λ es $V = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Para obtener la matriz de cambio de coordenadas $C = [U \mid V]$, falta hallar el vector U. Para ello, resolver el sistema:

$$\left(A - \tfrac{3}{2}I\right)U = V$$

se obtiene $U = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- La matriz de cambio de coordenadas es:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- La inversa de C es $C^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- La matriz canónica es:

$$\bar{A} = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- La matriz exponencial es:

$$e^{t\bar{A}} = e^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

- La solución en nuevas coordenadas es:

$$\bar{X}(t) = e^{t\bar{A}}\,\bar{h} \quad , \quad \bar{h} = \bar{X}(0) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}$$

- La solución en antiguas coordenadas es:

$$X(t) = C^{-1}\,e^{t\bar{A}}Ch \ , \ \bar{h} = C^{-1}h \ , \ h = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{3}{2}t}\bar{h}_1 U + e^{\frac{3}{2}t}(t\bar{h}_1 + \bar{h}_2)V$$

- Si la condición inicial es:

$$X(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\bar{X}(0) = \bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix} = C^{-1}X(0)$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos: $\bar{h}_1 = \frac{5}{4}$, $\bar{h}_2 - \frac{3}{4}$.

Entonces la solución del sistema es:

$$X(t) = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{\frac{3}{2}t}\left(\frac{5}{4}t - \frac{3}{4}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego, las trayectorias temporales son:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t} + \left(\frac{5}{2}t - \frac{3}{2}\right)e^{\frac{3}{2}t} \\ y(t) = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}t} + \left(-\frac{5}{4}t + \frac{3}{4}\right)e^{\frac{3}{2}t} \end{cases}$$

Ejemplo 03

(Caso 3: los **valores propios son números** complejos)

Resolver el sistema: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$

Condición inicial $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = h$

Resolución:

- La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \to tr\,A = 2+2 = 4 \\ \to |A| = 4+4 = 8 \end{matrix}$$

- El polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

- Los valores propios son:
  $\lambda_1 = 2+2i \ ; \ \lambda_2 = 2-2i$
- Elegir: $\lambda = 2+2i \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 > 0 \end{cases}$
- Los vectores propios se obtienen al resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2-(2+2i) & -2 \\ 2 & 2-(2+2i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los vectores propios.

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matriz de cambio de coordenadas es:

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y su inversa $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- La matriz canónica es:

$$\bar{A} = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- La matriz exponencial es:

$$e^{t\bar{A}} = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} cos(\beta t) & -sen(\beta t)\\ sen(\beta t) & cos(\beta t)\end{bmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} cos(2t) & -sen(2t)\\ sen(2t) & cos(2t)\end{bmatrix}$$

- **La solución en nuevas coordenadas es:**

$$\bar{X}(t) = e^{t\bar{A}}\,\bar{h}$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} cos(2t) & -sen(2t)\\ sen(2t) & cos(2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{h}_1\\ \bar{h}_2\end{bmatrix}$$

- **La solución en antiguas coordenadas es:**

$$X(t) = C\,e^{t\bar{A}}C^{-1}h$$

$$= e^{\alpha t}(\bar{h}_1 \cos\beta t - \bar{h}_2\, sen\,\beta t)U$$

$$+\, e^{\alpha t}(\bar{h}_1\, sen\,\beta t + \bar{h}_2 \cos\beta t)V$$

donde: $\begin{bmatrix}\bar{h}_1\\ \bar{h}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

Luego, la solución es:

$$X(t) = e^{2t}(-2\cos 2t - sen\,2t)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$+\, e^{2t}(-2\,sen\,2t + \cos 2t)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Las trayectorias temporales son:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(-2\cos 2t - sen\,2t)\\ y(t) = e^{2t}(-2\,sen\,2t + \cos 2t)\end{cases}$$

SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES EN TIEMPO DISCRETO.

Ejemplo 01

(Caso 1: los valores propios de la matriz A son números reales diferentes)

Resolver en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_{t+1} = 2y_t + \frac{1}{2}x_t + 3\\ x_{t+1} = \frac{7}{2}y_t - x_t + 3\end{cases}$$

Condición inicial $y_0 = 4$, $x_0 = -2$

Resolución:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{bmatrix}y_{t+1}\\ x_{t+1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & -1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}y_t\\ x_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}$$

- La matriz del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & -1\end{bmatrix} \quad tr\,A = 1,\ |A| = -\frac{15}{4}$$

- El polinomio característico es:

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - \frac{15}{4}$

- Los valores propios son: $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$.
- El vector propio asociado a $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ es $U = \begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix}$
- El vector propio asociado a $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ es $V = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.
- La matriz de cambio de coordenadas es $C = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -7 & 1\end{bmatrix}$.

Su inversa $C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$

- La matriz canónica es:

$$\bar{A} = C^{-1}AC = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

- La matriz exponencial es:

$$\bar{A}^t = \begin{bmatrix}\left(-\frac{3}{2}\right)^t & 0\\ 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^t\end{bmatrix}$$

A) La solución complementaria en nuevas coordenadas es:

$$\bar{X}_t = \bar{A}^t\,\bar{h} = \begin{bmatrix}\left(-\frac{3}{2}\right)^t & 0\\ 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{h}_1\\ \bar{h}_2\end{bmatrix}$$

La solución en antiguas coordenadas es:

$$X_t = C\bar{A}^tC^{-1}h \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

donde $\bar{h} = C^{-1}h$, $h = X_0 = \begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\bar{h}_1\\ \bar{h}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{13}{4}\end{bmatrix}$$

De (1) se obtiene:

$$X_t = \bar{h}_1\lambda_1^t\,U + \bar{h}_2\lambda_2^t\,V$$

$$X_t = \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^t\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix} + \frac{13}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

B) LA SOLUCIÓN PARTICULAR

Se halla del siguiente modo:

Hacer $\begin{cases} y_t = \bar{y}\ , & \bar{y} \text{ constante}\\ x_t = \bar{x}\ , & \bar{x} \text{ constante}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{t+1} = \bar{y}\\ x_{x+1} = \bar{x}\end{cases}$$

Reemplazar en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \bar{y} = 2\bar{y} + \frac{1}{2}\bar{x} + 3\\ \bar{x} = \frac{7}{2}\bar{y} - \bar{x} + 3\end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = \bar{y} + \frac{1}{2}\bar{x}\\ -3 = \frac{7}{2}\bar{y} - 2\bar{x}\end{cases}$$

Al resolver se obtiene: $\bar{y} = -2$, $\bar{x} = -2$

Entonces la solución particular es: $\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}$

C) La solución general es la suma de la solución general con la solución particular.

$$X_t = \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^t\begin{bmatrix}1\\ -7\end{bmatrix} + \frac{13}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^t + \frac{13}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^t - 2\\ -\frac{21}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^t + \frac{13}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^t + 2\end{bmatrix}$$

$t = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 02 (Caso 2)

Resolver el sistema: $\begin{cases} y_{t+1} = -\,y_t + \frac{3}{4}x_t\\ x_{t+1} = -3y_t + 2x_t\end{cases}$

Condición inicial: $y_0 = 5$, $x_0 = 8$

Resolución:

El sistema en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix}y_{t+1}\\ x_{t+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{4}\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_t\\ x_t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$$

- Se tiene $A=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{4}\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{cases} tr\,A=-1+2=1 \\ |A|=-2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}\end{cases}$
- El polinomio característico es:
  $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2$
- El único valor propio es $\lambda=\frac{1}{2}$.
- El vector propio asociado a λ es:
  $V=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
- El subespacio vectorial asociado a $\lambda=\frac{1}{2}$ es $SP_\lambda=\left\{ s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, s\in I\!R \right\}$ y la $\dim(SP_\lambda)=1$.
- Necesitamos otro vector U para obtener la matriz $C=[U\,|\,V]$.
- El vector U se halla resolviendo al sistema:

$$\left(A-\frac{1}{2}I\right)U=V$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ -3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-\frac{3}{2}\mu_1+\frac{3}{4}\mu_2=1\\ -3\mu_1+\frac{3}{4}\mu_2=2\end{cases}$$

Se reduce a una sola ecuación:

$$-6\mu_1+3\mu_2=4$$

$$\mu_2=\frac{4}{3}+2\mu_1$$

Luego, $U=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \frac{4}{3}+2\mu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}+\mu_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

Para $\mu_1=0$, obtenemos $U=\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$

Entonces la matriz de cambio de coordenadas es: $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{4}{3} & 2\end{bmatrix}$

Su inversa $C^{-1}=-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{3}{4} & 0\end{bmatrix}$

- La matriz canónica es:
  $\overline{A}=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$
- La matriz exponencial es:
  $\overline{A}^t=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^t & 0\\ t\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^t\end{bmatrix}$

A) La solución en nuevas coordenadas es:
$\overline{X}_t=\overline{A}^t\,\overline{h}$.

B) La solución en antiguas coordenadas es:

$$X_t=C\,\overline{A}^t\,C^{-1}h$$

$$X_t=\overline{h}_1\,\lambda^tU+\lambda^{t-1}(\overline{h}_1t+\overline{h}_2\lambda)V$$

- $\overline{h}=\begin{bmatrix}\overline{h}_1\\ \overline{h}_2\end{bmatrix}=C^{-1}X_0$, $X_0=\begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$

$$=-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{4}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 5\end{bmatrix}$$

- Conclusión:

$$X_t=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\left(-\frac{3}{2}t+\frac{5}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$t=1,2,3,\ldots$$

Ejemplo 03 (Caso 3).

Resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix}y_{t+1}\\ x_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Resolución:

- $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\begin{cases}tr\,A=2+2=4\\ |A|=4+4=8\end{cases}$
- El polinomio característico es:
  $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+8$
- Los valores propios son:

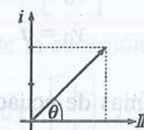
$$\lambda_1=2+2i\ ,\ \lambda_2=2-2i$$

considerar: $\lambda=2+2i\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=2\end{cases}$

donde: $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

$tg\,\theta=\frac{2}{2}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases}\alpha=\rho\cos\theta\\ \beta=\rho\,sen\,\theta\end{cases}$$



- Los vectores propios se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix}2-(2+2i) & -2\\ 2 & 2-(2+2i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

se reduce a una sola ecuación:

$$2m-2in=0$$

$$m=in$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}in\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+in\\ n+i0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$$

$$=n\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{V}+in\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{U}$$

- La matriz de cambio de coordenadas es:
  $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ y $C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
- La matriz canónica es:
  $\overline{A}=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$
  $=\rho\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$
- La matriz exponencial es:

$$\overline{A}^t=\rho^t\begin{bmatrix}\cos(\theta t) & -sen(\theta t)\\ sen(\theta t) & \cos(\theta t)\end{bmatrix}$$

$$=2^{\frac{3}{2}t}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & -sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\end{bmatrix}$$

A) La solución en coordenadas nuevas es:
$\overline{X}_t=\overline{A}^t\,\overline{h}$.

B) La solución en antiguas coordenadas es:

$$X_t=C\,\overline{A}^t\,C^{-1}h\ ,\ h=X_0=\begin{bmatrix}y_0\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\rho^t[\overline{h}_1\cos(\theta t)-\overline{h}_2\,sen(\theta t)]U$$

$$+\rho^t[\overline{h}_1\,sen(\theta t)+\overline{h}_2\cos(\theta t)]V$$

donde $\begin{bmatrix}\overline{h}_1\\ \overline{h}_2\end{bmatrix}=C^{-1}h$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Luego: $X_t=2^{\frac{3}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-2sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$+2^{\frac{3}{2}t}\left[sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Dado el sistema de ecuaciones en diferencia $\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$

a) Hallar los valores de α y β para tener una matriz canónica, $\overline{A}$.
b) Resolver el sistema para los valores de α y β hallados en a).
c) Analizar la estabilidad del equilibrio (0,0).

02. Resolver el sistema lineal y analizas la estabilidad $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

03. ¿Para cual valor de "a", la solución del siguiente sistema diferencial converge sobre (0,0)?

$$\dot{x} = -2x - 2y \qquad x_0 = 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y \qquad y_0 = a$$

04. Convertir las siguientes ecuaciones en sistemas de ecuaciones en diferencia de primer orden:

a) $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0$ b) $y_{t+3} + 2y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = 0$

05. Analizar la estabilidad de la solución del sistema: $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t - \frac{1}{2}y_t$, $y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t$

06. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad: $x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t$; $y_{t+1} = x_t + \frac{1}{2}y_t$

07. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad: $\dot{x} = -x + y$; $\dot{y} = -x - y$

08. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad:

$$\dot{x} = x + y \qquad x(0) = 1$$
$$\dot{y} = -x + y \qquad y(0) = 1$$

09. Resolver el sistema lineal y analizar la estabilidad:

$$x_{t+1} = x_t + y_t \qquad x_0 = 1$$
$$y_{t+1} = -x_t + y_t \qquad y_0 = 1$$

10. Dado el sistema de ecuación diferencial: $\dot{x} = 1x + ky$; $\dot{y} = -2x + my$

a) Hallar los valores de k y m para tener una matriz canónica $\overline{A}$.
b) Resolver el sistema y analizar la estabilidad para los valores de parámetros hallados en a).

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ -0.25 & -0.75 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución general de la ecuación en diferencia $Y_{t+1} = AY_t$. ¿Qué ocurre con Y_t si $t \longrightarrow +\infty$?
b) Encontrar la solución general de la ecuación en diferencia $X_{t+1} = AX_t + b$. ¿Qué ocurre con X_t si $t \longrightarrow +\infty$?

12. a) Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Encontrar la solución de la ecuación en diferencia $X_{t+1} = AX_t + b$ el cual satisface la condición inicial $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ¿Qué ocurre con X_t si $t \longrightarrow +\infty$?

b) Resolver a) cuando $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

13. a) Considere la ecuación en diferencia de tercer orden $y_{t+3} + f\,y_{t+2} + g\,y_{t+1} + h\,y_t = 0$ donde *f, g, h* son constantes. Por definición apropiada hallar y_t, mostrando que esta ecuación puede ser expresada en forma de sistema de ecuaciones en diferencia, donde *A* es una matriz 3 × 3.

b) Ahora considerar la ecuación en diferencia de cuarto orden:

$$x_{t+4} + b_1x_{t+3} + b_2x_{t+2} + b_3x_{t+1} + b_4x_t = b_5$$

donde $b_1, \dots, b_5$ son constantes. Por definición apropiada hallar x_t, expresando esta ecuación en la forma de un sistema, donde *A* es una matriz 4×4 y *b* es un vector columna 4×1.

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuación en diferencia:

a) $y_{t+1} = y_t + 5x_t - 10$, $y_0 = 6$
$x_{t+1} = \frac{1}{4}y_t - x_t + 10$, $x_0 = -1$

b) $y_{t+1} = 2y_t + \frac{1}{2}x_t + 3$, $y_0 = 4$
$x_{t+1} = \frac{7}{2}y_t - x_t + 3$; $x_0 = -2$

c) $y_{t+1} = -y_t + \frac{3}{4}x_t$; $y_0 = 5$ d) $y_{t+1} = 2y_t - 2x_t$; y_0 dado

$x_{t+1} = -3y_t + 2x_t$; $x_0 = 8$ $x_{t+1} = 2y_t + 2x_t$; x_0 dado

15. Hallar los puntos de equilibrios y analizar la estabilidad de los sistemas del problema 14).

16. Resolver el sistema de ecuación en diferencia $\begin{bmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ q_t \end{bmatrix}$.

Hallar el punto de equilibrio y hallar la condición que debe cumplirse para que la solución converja al punto de equilibrio.

17. Encontrar la solución general de la ecuación general $\dot{Y} = AY$, en el caso donde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. También encontrar la solución, si $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ cuando $t = 0$.

18. Encontrar la solución general de la ecuación general $\dot{X} = AX + b$, en el caso donde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. También encontrar la solución, si $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ cuando $t = 0$.

19. Para cada uno de los pares siguientes de ecuaciones diferenciales. Encontrar el punto de equilibrio, y clasificarlo.

a) $\dot{x} = x + 2y - 1$, $\dot{y} = 5x + 7y - 2$ b) $\dot{x} = 3x + 7y + 2$, $\dot{y} = -2x - 3y + 1$

c) $\dot{x} = -3x - 2y + 10$, $\dot{y} = x - 3y - 7$ d) $\dot{x} = 9x + 4y$, $\dot{y} = 5x + 3y$

20. Bosquejar el diagrama de fase de los problemas de la pregunta 19).

21. Resolver el siguiente sistema lineal y bosquejar el diagrama de fase $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$

22. Encontrar e^{At} y resolver los sistemas lineales $\dot{X} = AX$ para:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

23. Encontrar la solución del sistema lineal $\dot{X} = AX$ donde:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

24. Resolver el sistema lineal $\dot{X} = AX$ y graficar el diagrama de fase para:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. Si $\det(A) = 0$, entonces el origen es un punto singular de $\dot{X} = AX$. Determinar la solución y el correspondiente diagrama de fase de el sistema lineal.

a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

26. Resolver el problema $\dot{X} = AX$, $X(0) = X_0$ donde $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden en sistemas de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y resolver:

a) $2\ddot{y} - 5\dot{y} + y - 100 = 0$ b) $\ddot{y} - 2y = 1$ c) $\ddot{y} + 10\dot{y} + y = 1$

28. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales resolver con las condiciones iniciales dadas.

a) $\dot{y}_1 = y_1 + 5y_2 + 18$; $\dot{y}_2 = \frac{1}{4}y_1 - y_2 + 9$; $y_1(0) = 6$; $y_2(0) = 0$.

b) $\dot{y}_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}y_2$; $y_2 = \frac{7}{2}y_1 - y_2 + 15$; $y_1(0) = 2$; $y_2(0) = 4$.

c) $\dot{y}_1 = 3y_1 + y_2 + 4$; $y_2 = 2y_1 + 2y_2 - 12$; $y_1(0) = -2$; $y_2(0) = 5$.

29. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales, determinar si el sistema es un nodo estable o inestable, punto silla, foco estable e inestables o centro.

a) $\dot{y}_1 = 10y_1 + 3y_2 + 2$
$\dot{y}_2 = -3y_1 + y_2 + 1$

b) $\dot{y}_1 = y_1 + 3y_2 + 10$
$\dot{y}_2 = -2y_1 + y_2 - 5$

c) $\dot{y}_1 = 2y_1 - 6y_2 - 1$
$\dot{y}_2 = -3y_1 + 5y_2 + 2$

d) $\dot{y}_1 = -2y_1 - 4y_2 + 5$
$\dot{y}_2 = -2y_1 - 9y_2 + 1$

30. Resolver el siguiente sistema de ecuación diferencial, bosquejar el diagrama de fase y encontrar la ecuación para la senda silla: $\dot{y}_1 = 2y_1 - 9y_2$; $\dot{y}_2 = -3y_1 - 4y_2$.

31. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferencial lineal. Bosquejar el diagrama de fase y encontrar la ecuación de la senda silla. Si $y_1(0) = 8$. ¿Qué valor debe tener $y_2(0)$ para que el sistema converja a su punto de equilibrio?

$\dot{y}_1 = 2y_1 - 9y_2 + 35$; $\dot{y}_2 = -3y_1 - 4y_2 + 70$.

32. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y realizar el diagrama de fase correspondiente:

a) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$ b) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X$ c) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X$ d) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} X$

e) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$ f) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 100 \end{pmatrix} X$ g) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$ h) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

i) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X$ j) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

33. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

a) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} X$ b) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} X$

c) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ d) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

34. En los siguientes problemas, x e y representan poblaciones de especies distintas que compiten entre sí. El sistema dinámico que describe su evolución es la versión vectorial del modelo logístico de crecimiento. Describir los diagramas de fase correspondientes y analizar el tipo de equilibrio y la evolución de las poblaciones.

a) $\dot{x} = x(2 - x - y)$, $\dot{y} = y(6 - 2x - y)$
b) $\dot{x} = x(6 - 2x - y)$, $\dot{y} = y(2 - x - y)$
c) $\dot{x} = x(2 - 2x + y)$, $\dot{y} = y(6 + x - 2y)$.

Este último caso no describe un sistema en competencia sino uno en simbiosis. Explicarlo.

35. Considerar el sistema: $\dot{P} = P(1 - P) - \gamma PN$; $\dot{N} = N + \gamma PN$ donde γ es un parámetro positivo. Hallar los puntos de equilibrios y clasificarlos.

36. El ingreso "y" y el índice de pecios "p" se relacionan de acuerdo con el siguiente sistema lineal: $\dot{y} = ay - p$; $\dot{p} = y - bp + ab - 1$ donde $a, b > 0$.

a) ¿Para qué valores de a y b se tiene un comportamiento "cíclico" de las variables?
b) ¿Para qué valores de a y b es estable el sistema?

37. Sea "p" el nivel de precios y "w" el salario nominal. El cambio en el salario está dado por: $\dot{W} = A(W - ap)$, y la inflación $\dot{p}$ está determinada por el cambio en el salario y por la presión en la demanda, de manera que satisface la ecuación $\dot{p} = B\dot{W} + C(W - ap)$ Adicionalmente se tiene que se cumplen A, B, C, $a > 0$ y $a(AB + C) > A$. Resolver el sistema y analizar el tipo de equilibrio que se obtiene.

38. Considerar el siguiente sistema lineal: $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 \\ \alpha^2 - \beta^2 & 0 \end{pmatrix} X$ donde se supone que $\beta > \alpha > 0$. Explicar porque $p^* = (0,0)$ es un punto silla.

39. Considerar el sistema $\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x - y(x^2 + y^2)$. Demostrar que (0,0) es un punto de equilibrio degenerado y sin embargo es asintóticamente estable.

40. Considere el siguiente modelo de crecimiento económico (Modelo de Ramsey-Casskoopmans). $\dot{k} = f(k) - nk - c$; $\dot{c} = \frac{(f'(k) - \rho)c}{\theta}$

a) Asumiendo que $f(k) = k^{0.5}$, $\rho = 0.5$, $n = 0.2$ y $\theta = 0.5$. Encontrar un punto de equilibrio (k^*, c^*), tal que $k^* > 0$ y $c* > 0$. Explicar por qué (k^*, c^*) es un punto silla.

b) Suponer que el capital percápita inicial es $k_0 = 0.1 + k^*$. Aproximadamente, ¿Qué valor debe tener el consumo pércapita inicial c_0 para que el sistema converja al punto de equilibrio (k^*, c^*)?

41. Linealizar cada uno de los siguientes sistemas alrededor de su(s) punto(s) de equilibrio y realizar los diagramas de fase correspondientes:

a) $\dot{x} = 4x - 3xy$; $\dot{y} = 3y - xy$ b) $\dot{x} = 3y^2 - x$; $\dot{y} = -(3x^2 + y)$

42. Considérese el siguiente sistema no lineal: $\dot{x}=x-1$; $\dot{y}=xe^{x}-y$. Encontrar los puntos de equilibrios y clasificarlos.

43. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es autónomo $\dot{x}=f(x,y)$; $\dot{y}=g(x,y)$.

a) Supongamos que: *i)* $f_x=0$, $f_y>0$, $g_x>0$ y $g_y=0$.

ii) $f_x=0$, $f_y<0$, $g_x<0$ y $g_y=0$

Para cada caso, construir un diagrama de fases apropiado, dibujar las trayectorias y determinar la naturaleza del equilibrio.

b) *i)* Demostrar que es posible producir o bien un nodo estable o bien un foco estable a partir del sistema de ecuaciones diferenciables dado, si:

$$f_x<0 \ , \ f_y>0 \ , \ g_x<0 \ \ g_y<0$$

ii) En la construcción del anterior diagrama de fases. ¿Qué características especiales son las responsables de que se obtengan resultados diferentes (nodo o foco)?

44. Analizar la estabilidad local de cada uno de los siguientes sistemas lineales.

a) $\dot{x}=e^{x}-1$; $\dot{y}=ye^{x}$ b) $\dot{x}=x+2y$; $\dot{y}=x^2-y$

c) $\dot{x}=1-e^{y}$; $\dot{y}=5x-y$ d) $\dot{x}=x^3+3x^2y+y$; $\dot{y}=x(1+y^2)$

45. Para los sistema de diferencias encontrar sus puntos de equilibrio y determinar su tipo.

a) $x_{t+1}=5x_t+10$ b) $x_{t+1}=-\frac{1}{2}x_t-2$ c) $x_{t+1}=-0.8x_t$

$y_{t+1}=2y_t$ $y_{t+1}=\frac{1}{2}y_t-2$ $y_{t+1}=-1.2y_t$

46. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones en diferencia en las variables (x_t, y_t, z_t). Determinar sus puntos de equilibrio y describa la estabilidad local de cada punto de equilibrio.

a) $x_{t+1}=x_t^2-x_ty_t$ b) $x_{t+1}=0.5x_t^2$ c) $x_{t+1}=x_ty_t+30$

$y_{t+1}=y_t^{1/2}+6$ $y_{t+1}=-y_t+3$ $y_{t+1}=2y_t^{1/2}+8$

$z_{t+1}=z_t^2+x_ty_t$ $z_{t+1}=z_t-2$ $4z_{t+1}=x_ty_t+4z_t^2+8$

47. Linealizar el sistema: $y_{t+1}=y_t+y_tx_t$; $x_{t+1}=-y_tx_t+2y_t-3x_t$ en el punto de equilibrio y describa la estabilidad local de cada punto de equilibrio.

5. APLICACIÓN EN MÉTODOS ECONOMÉTRICOS

El modelo lineal general de k variables.

Hipótesis:

Supongamos que existe una relación lineal entre una variable Y y $k-1$ variables explicativas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ y un término de perturbaciones u.

Si tenemos una muestra de n observaciones de Y y X podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones con k incógnitas.

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1+\beta_2x_{12}+\beta_3x_{13}+\ldots+\beta_kx_{1k}+u_1 \\ y_2 &= \beta_1+\beta_2x_{22}+\beta_2x_{23}+\ldots+\beta_kx_{2k}+u_2 \\ y_3 &= \beta_1+\beta_2x_{32}+\beta_3x_{33}+\ldots+\beta_kx_{3x}+u_3 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_1+\beta_2x_{n2}+\beta_3x_{n3}+\ldots+\beta_kx_{nk}+u_n \end{aligned}$$

que expresado en forma matricial es:

$$(1) \ \boxed{Y=X\beta+U} \ , \text{ donde } Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ X=\begin{bmatrix} 1 & x_{12}\cdots\cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22}\cdots\cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n2}\cdots\cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \ \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \ U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

donde U se llaman las perturbaciones.

Las incógnitas son β_i y los u_i. En estadística, los valores verdaderos de estas incógnitas no se pueden hallar, lo que se puede hallar son sus *estimaciones*. Dichas estimaciones se hallan aplicando el método de los mínimos cuadrados.

Denotemos por $\hat{\beta}=\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$ las estimaciones de los β_i y denotamos por $e=\begin{bmatrix} e_i \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ los residuos.

Entonces la ecuación matricial (1) se puede expresar por:

(2) $\boxed{y=X\hat{\beta}+e}$. Al despejar e, obtenemos: $e=y-X\hat{\beta}$.

La suma de los cuadrados de los residuos se define por:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^t e \quad , \quad e^t : \text{transpuesta de } e$$

$$= (Y - X\hat{\beta})^t (Y - X\hat{\beta})$$

$$= (Y^t - \hat{\beta}^t X^t)(Y - X\hat{\beta})$$

$$= Y^t Y - Y^t X\hat{\beta} - \hat{\beta}^t X^t Y + \hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}$$

Son iguales porque; $Y^t X\hat{\beta}$ es un escalar. La transpuesta de un escalar es el mismo escalar.

es una matriz simétrica

$\hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}$ es una matriz simétrica. Al derivar respecto a $\hat{\beta}$ se obtiene: $2X^t X\hat{\beta}$.

$$e^t e = Y^t Y - 2\hat{\beta}^t X^t Y + \hat{\beta}^t X^t X\hat{\beta}$$

Ahora derivar respecto a $\hat{\beta}$.

$$\frac{\partial(e^t e)}{\partial \hat{\beta}} = 0 - 2X^t Y + 2X^t X\hat{\beta}$$

Para que $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ sea mínima debe cumplirse que su derivada sea igual a cero, esto es:

$$-2X^t Y + 2X^t X\hat{\beta} = 0$$

$\Longleftrightarrow (X^t X)\hat{\beta} = X^t Y$, **como $(X^t X)$ es una matriz cuadrada y tiene inversa se puede resolver la ecuación matricial y poder hallar la matriz $\hat{\beta}$.**

$$\boxed{\hat{\beta} = (X^t X)^{-1}(X^t Y)} \text{, donde } X^t X = \begin{bmatrix} n & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix}, \quad X^t Y = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma XY \end{bmatrix}$$

Resolviendo, esta ecuación se hallan los valores de $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_k\}$.

Mayor información se encuentra en algún libro de Econometría.

El álgebra lineal, también se aplica en:

- **Teoría de grafos**
- **Teoría de juegos**
- **Cadenas de Markov**
- **Gestión forestal**
- **Distribuciones en el equilibrio de temperatura**
- **Algunas aplicaciones genéticas**
- **Programación lineal.**

BIBLIOGRAFÍA

[1] Kenneth Hoffmann – Ray Kunze; *Álgebra Lineal*. Printice – Hall.

[2] Elon Lages Lima; *Álgebra Lineal*. Textos del IMCA.

[3] Klaus Jänich; *Linear Algebra*. Editorial Board.

[4] I.V. Proskunakov; *Problemas de Álgebra Lineal*. Editorial Reverté S.A.

[5] A. Wayne Roberts; *Elementary Linear Algebra*. Benjamin Cummings.

[6] Seymour Lipschutz; *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill.

[7] Ramón García Cobián; *Notas de Clase*.

[8] Steven Romann; *Advanced Linear Algebra*.

[9] Francis G-Florey; *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones*.

[10] Serge Lang; *Álgebra Lineal*.

[11] Stanley I. Grossman; *Álgebra Lineal*.

[12] Howard Anton; *Introducción al Álgebra Lineal*.

[13] I. N. Herstein; *Álgebra Moderna*.

[14] Bernard Kolman; *Álgebra Lineal*.

[15] J. Johnston; *Métodos de Econometría*. Edit. Vicens-Vives.

